Pisteen etäisyys suorasta

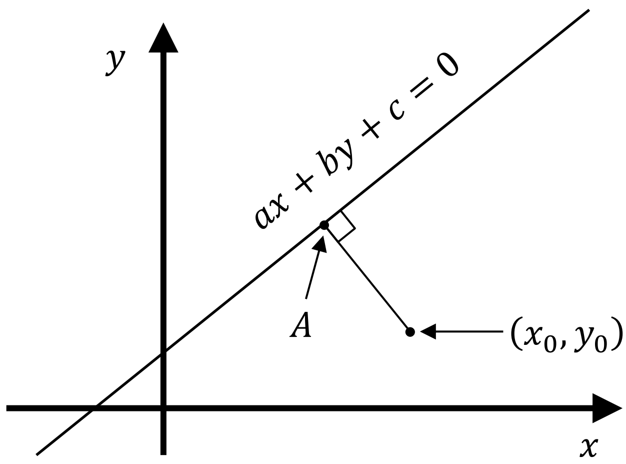
Lause, Pisteen etäisyys suorasta:

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ (missä vähintään $a \neq 0$ tai $b \neq 0$) on

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Todistus: Mitä tiedetään. Suoran yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$



Suorien kohtisuoruudesta tiedetään, että kahden, toisiaan kohtisuorassa olevien, suoran kulmakertoimille k_1 ja k_2 pätee

$$k_1 k_2 = -1.$$

Näin ollen suoralle $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ kohtisuorassa olevan suoran kulmakertoimeksi saadaan $\frac{b}{a}$. Eli muodostuu normaali

$$y_n = \frac{b}{a}x + d.$$

Tarkastellaan sellaista normaalia suoralle $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, joka kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta. Muodostuu siis suoran yhtälö

$$y_n - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad y_n = \frac{b}{a}x + \underbrace{\left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right)}_{=d}.$$

Nämä kohtisuorassa toisiaan vastaan olevat suorat

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ y_n = \frac{b}{a}x + \left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right) \end{cases}$$

leikkaavat toisensa pisteessä A katso kuva, voidaan merkitä $A = (A_x, A_y)$.

Toisaalta, kysytty etäisyys d voidaan ilmaista myös yhtälöllä

$$d = \sqrt{(A_x - x_0)^2 + \left(A_y - y_0\right)^2}, \qquad \text{missä siis } A = (A_x, A_y).$$

Etsitään A_x ja A_y: Leikkauskohdassa $y(x) = y_n(x) = A_y$, joten

$$-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = \frac{b}{a}x + \left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right) \quad \Leftrightarrow \quad -y_0 + \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b} = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^2 + a^2}{ab}x = -y_0 + \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{ab\left(-y_0 + \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b}\right)}{b^2 + a^2}.$$

Sijoitetaan näin saatu x suorien yhtälöön $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ja $y_n = \frac{b}{a}x + \left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right)$, siis

$$y = y(x) = -\frac{a}{b}\left(\frac{ab\left(-y_0 + \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b}\right)}{b^2 + a^2}\right) - \frac{c}{b}$$

$$= -\frac{a^2\left(-y_0 + \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b}\right)}{b^2 + a^2} - \frac{c}{b}$$

$$= \frac{a^2\left(y_0 - \frac{b}{a}x_0 + \frac{c}{b}\right)}{b^2 + a^2} - \frac{\frac{c}{b}(b^2 + a^2)}{(b^2 + a^2)}$$

$$= \frac{a^2\left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right) - cb}{b^2 + a^2}$$

ja

$$y_n = y_n(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{ab\left(-y_0 + \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b}\right)}{b^2 + a^2}\right) + \left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right)$$

$$= \frac{b^2\left(-y_0 + \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b}\right)}{b^2 + a^2} + \frac{\left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right)(b^2 + a^2)}{b^2 + a^2}$$

$$= \frac{-bc + a^2\left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right)}{b^2 + a^2}.$$

Eli $y = y_n$ niin kuin pitääkin. On saatu lausekkeet pisteen A koordinaateille:

$$\begin{cases} A_x = \dfrac{ab\left(-y_0 + \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b}\right)}{b^2 + a^2} \\ A_y = \dfrac{a^2\left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right) - cb}{b^2 + a^2} \end{cases}.$$

Jäljellä on laskea etäisyys Pythagoraan avulla:

$$d = \sqrt{(A_x - x_0)^2 + \left(A_y - y_0\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{ab\left(-y_0 + \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b}\right)}{b^2 + a^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{a^2\left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right) - cb}{b^2 + a^2} - y_0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-aby_0 + b^2x_0 - ac - a^2x_0 - b^2x_0}{b^2 + a^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2y_0 - abx_0 - cb - a^2y_0 - b^2y_0}{b^2 + a^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-aby_0 - ac - a^2x_0}{b^2 + a^2}\right)^2 + \left(\frac{-abx_0 - cb - b^2y_0}{b^2 + a^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-a(by_0 + c + ax_0)}{b^2 + a^2}\right)^2 + \left(\frac{-b(ax_0 + c + by_0)}{b^2 + a^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(by_0 + c + ax_0)^2}{(b^2 + a^2)^2} + \frac{b^2(by_0 + c + ax_0)^2}{(b^2 + a^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(ax_0 + by_0 + c)^2}{(b^2 + a^2)^2}} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{b^2 + a^2}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ja asia selvä.

Vektorit kurssilla tulos saadaan huomattavasti kätevämmin.