MAA 5 Suoran eri esitysmuodot/kertausta ja esimerkkejä

1) Ratkaistu muoto (eksplisiittinen):

$$y = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad (a \neq 0),$$

$$\underbrace{y = b}_{\substack{\text{vaaka-eli } x\text{-akse-} \\ \text{lin suuntainen}}}, \qquad (a = 0) \text{ ja } \underbrace{x = a}_{\substack{\text{pysty-eli } y\text{-akse-} \\ \text{lin suuntainen}}}.$$

Esimerkki

$$\textbf{i)}\ \ y = 3x - 7, \qquad \textbf{ii)}\ \ y = 12, \qquad \textbf{iii)}\ \ y = \pi^e x - \sqrt{17}\,.$$

2) Yleinen muoto (implisiittinen):

$$ax + by + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad a, b \neq 0.$$

Esimerkki

$$\textbf{i)}\ -x + 2y - 5 = 0, \qquad \textbf{ii)}\ 16x - 33y + 1015 = 0, \qquad \textbf{iii)}\ -\pi x + \sqrt{2}y - \sqrt[3]{3} = 0\,.$$

3) Parametrimuoto (vain yksi muuttuja, eli $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad (a, b \neq 0).$$

Mikäli kerroin a tai b on nolla, niin kyseinen suora on tällöin jommankumman akselin suuntainen.

Huomaa, että kun $a, b \neq 0$, niin parametrimuoto voidaan kirjoittaa muodossa (ratkaistaan yhtälöparin yhtälöt t:een suhteen):

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = t \\ \dfrac{y - y_0}{b} = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eli koska $t = t$, niin

$$t = \frac{\boldsymbol{x - x_0}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{y - y_0}}{\boldsymbol{b}} = t, \qquad a, b \neq 0\,.$$

Lisäksi piste (x_0, y_0) on suoran tunnettu piste eli piste (x_0, y_0) on suoralla.

Esimerkki

$$\textbf{i)}\ \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \textbf{ii)}\ \begin{cases} x = -17 - \pi t \\ y = -17 + \pi t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

$$\textbf{iii)}\ \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-1}\,, \qquad \textbf{iv)}\ x = y + 3 \quad \text{eli} \quad \frac{x - 0}{1} = \frac{y + 3}{1}.$$

YLEISESTI:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = kx \underbrace{-kx_0 + y_0}_{=\text{vakiotermi}} = ax + b$$

Eli muodosta $y - y_0 = k(x - x_0)$ päästään muotoon $y = ax + b$ ja toisinpäin. Toisaalta, kun jatketaan, niin

$$y = kx - kx_0 + y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{-k}_{"a"} x + \underbrace{1}_{"b"} \cdot y + \underbrace{kx_0 - y_0}_{"c", \text{ eli vakio}} = ax + by + c = 0\,.$$

Siis ratkaistusta muodosta $y = ax + b$ on päästy yleiseen muotoon $ax + by + c = 0$. Lopuksi, miten linkitetään parametrimuoto näihin edellisiin, niin havaitaan, että koska $k = \frac{k}{1}$, niin

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y - y_0 = \frac{k}{1}(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y - y_0}{k} = \frac{x - x_0}{1}, \qquad k \neq 0$$

ja edellisen sivun kohdan 3 nojalla ($k \neq 0$)

$$\frac{y - y_0}{k} = \frac{x - x_0}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + 1 \cdot t \\ y = y_0 + k \cdot t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

SUMMA SUMMARUM: Kaikki suoran esitysmuodot voidaan muuttaa toisiksi muodoiksi! Tämä pitää osata!

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y - y_0}{k} = \frac{x - x_0}{1}, \quad k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + 1 \cdot t \\ y = y_0 + k \cdot t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = kx - kx_0 + y_0 \quad \Leftrightarrow \quad -kx + 1 \cdot y + kx_0 - y_0 = 0\,.$$

Huomioita: Parametrimuodossa $\begin{cases} x = x_0 + 1 \cdot t \\ y = y_0 + k \cdot t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ pitää olla näkyvissä, että $t \in \mathbb{R}$!

Esimerkki: Ilmoita kaikissa eri esitysmuodoissa, kun suora on annettu muodossa

a) $y - 2 = -3(x + 4)$

b) $y = 5x - \sqrt{17}$

c) $2x - y - 4 = 0$

d) $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

e) $\frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{-2}$

RATKAISUT: Tapoja siirtyä muodosta toiseen on monia, joten tässä vain eräs (suppeahko) esitys.

a)

$$y-2=-3(x+4) \quad \Rightarrow \quad y=-3x-12+2$$
$$=-3x-10$$
$$\Rightarrow \quad 3x+y-2+12=0$$
$$3x+y+10=0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{y-2}{-3}=\frac{x-(-4)}{1}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x=-4+t \\ y=2-3\cdot t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

b)

$$y=5x-\sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad y+\sqrt{17}=5(x-0)$$
$$\Rightarrow \quad -5x+y+\sqrt{17}=0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{y+\sqrt{17}}{5}=x \quad \text{eli} \quad \frac{y+\sqrt{17}}{5}=\frac{x-0}{1}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x=0+t \\ y=-\sqrt{17}+5\cdot t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

TAI

Koska $y=5x-\sqrt{17}$ voidaan kirjoittaa muodossa $y=5x-\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}$, niin saadaan

$$\Rightarrow \quad y+\frac{\sqrt{17}}{2}=5\left(x-\frac{\sqrt{17}}{10}\right)$$

ja edelleen

$$\Rightarrow \quad \frac{y+\frac{\sqrt{17}}{2}}{5}=\frac{x-\frac{\sqrt{17}}{10}}{1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{17}}{10}+t \\ y=-\dfrac{\sqrt{17}}{2}+5\cdot t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

c)

$$2x-y-4=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-2}{-1}x+\frac{4}{-1}$$
$$=2x-4$$
$$\Rightarrow \quad y+4=2(x-0) \quad \text{tai} \quad y+2=2(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y+4}{2} = x \text{ tai } \frac{y+2}{2} = \frac{x-1}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = -4 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

d)

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-5}{-2} = \frac{y-0}{1} \text{ (eli } y)$$

$$\Rightarrow \quad x - 5 = -2y \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

e)

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{-2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad 2(x+3) = 5(y-2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 6 = 5y - 10$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 5y + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5y = -2x - 16 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{2}{5}x - \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \quad y + \frac{16}{5} = -\frac{2}{5}(x - 0)$$