Matematiikan koe, Maa4 – Analyyttinen Geometria – RATKAISUT **Sievin lukio**
Torstai 22.5.2014
VASTAA YHTEENSÄ KUUTEEN TEHTÄVÄÄN

---

1. a) Määritä luku t siten, että piste $(0, t)$ on pisteiden $(1, 1)$ ja $(4, 7)$ kautta kulkevalla suoralla.

b) Mitkä tason pisteet toteuttavat epäyhtälöparin $\begin{cases} y > 4x - 3 \\ |x| \leq 3 \end{cases}$, hahmota/piirrä tilanteesta kuvio tasoon.

c) Osoita, että suorat $px - y - \frac{1}{2}p + 3 = 0$ kulkevat kaikilla p:n arvoilla saman pisteen kautta?

a) Piste $(0, t)$ on suoralla, mikäli se toteuttaa suoran yhtälön. Muodostetaan suora, eli määritetään kulmakerroin ja sijoitetaan yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$. Siis

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = 2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 2x - 2$$

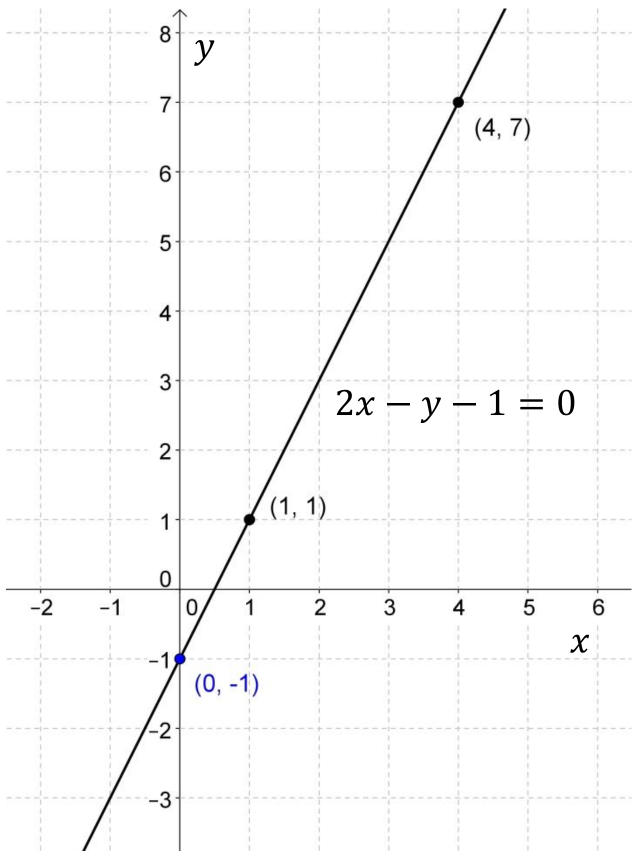
$$\Rightarrow \quad 2x - y - 1 = 0 \text{ tai } -2x + y + 1 = 0.$$

Vaihtoehtoisesti voi käyttää toista pistettä

$$\Rightarrow \quad y - 7 = 2(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y - 7 = 2x - 8$$

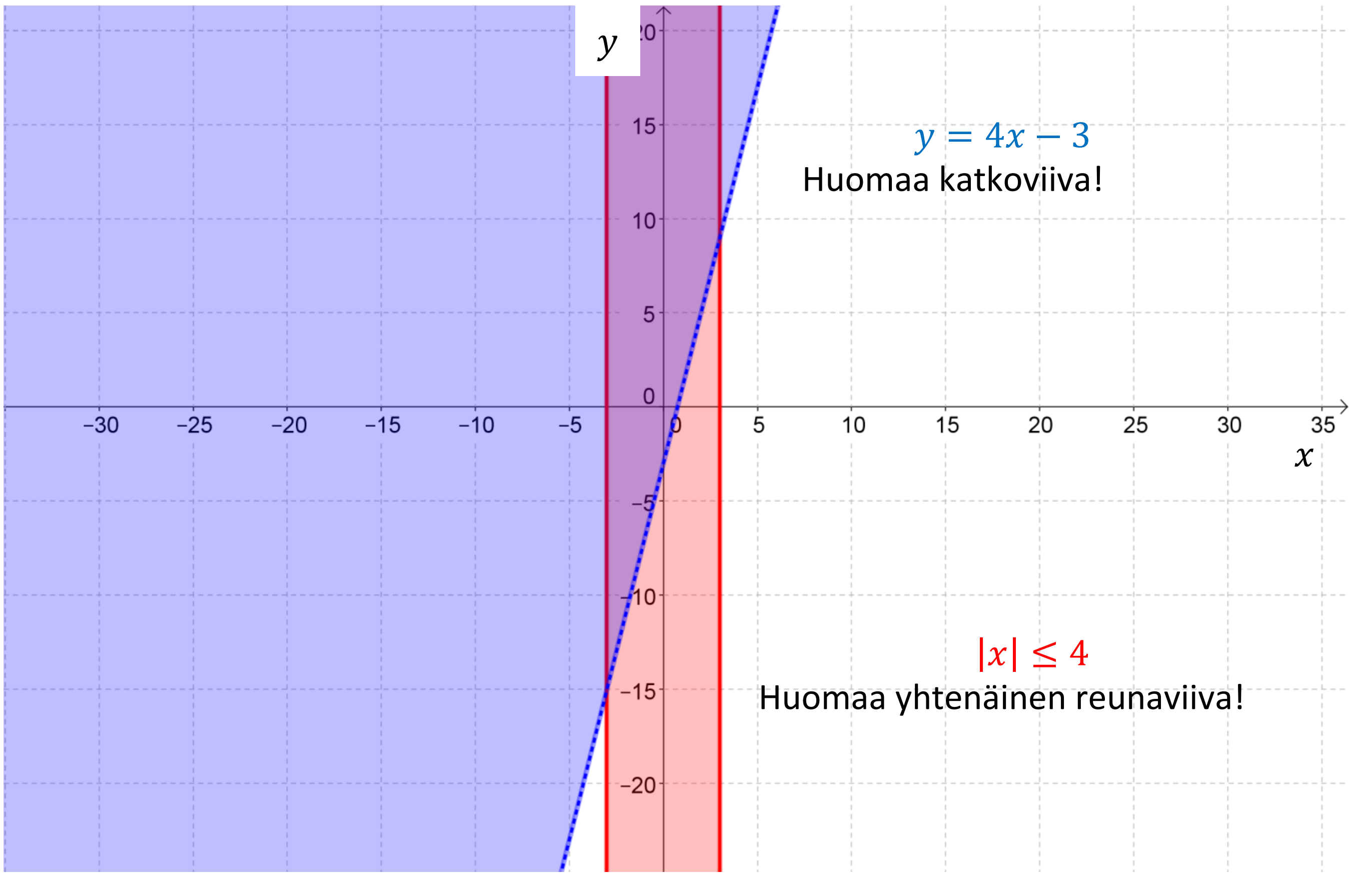
$$\Rightarrow \quad 2x - y - 1 = 0 \text{ tai } -2x + y + 1 = 0.$$

Saatiin sama suora (niin kuin pitääkin). Sijoitetaan pisteen $(0, t)$ koordinaatit ja ratkaistaan t, saadaan



$$2 \cdot 0 - t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$$

b) Ratkaistaan epäyhtälöpari $\begin{cases} y > 4x - 3 \\ |x| \leq 3 \end{cases}$. Ylemmästä saadaan kaikki tason pisteet, jotka ovat suoran $y = 4x - 3$ ”yläpuolella”. Vastaavasti itseisarvoepäyhtälön $|x| \leq 3$ ratkaisuksi saadaan (”ja”- tilanne) kaikki ne tason pisteet, joiden vaaka- eli x-koordinaatille pätee $-3 \leq x \leq 3$, huomaa yhtäsuuruus. Nämä yhdistämällä saadaan alla oleva tason osa.



c) Kaksi tapaa, tehdään ensin lyhyempi ja tyylikkäämpi ☺.

TAPA1 Koska

$$px - y - \frac{1}{2}p + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad -y + 3 = -px + \frac{1}{2}p \quad \Longrightarrow \quad y - 3 = p\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

niin kaikki parven suorat kulkevat pisteen $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ kautta (eli piste ei riipu p:n arvosta millään tavoin).

TAPA2 Toinen tapa on antaa parametrille p kaksi arvoa, eli saadaan kaksi suoraa, lasketaan näiden suorien leikkauspiste ja varmistutaan että tämä leikkauspiste toteuttaa alkuperäisen suoraparven yhtälön. Siis

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1} \cdot x - y - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = x + 2\frac{1}{2},$$

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{0} \cdot x - y - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{0} + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 3.$$

Leikkauspisteessä $y = y$, eli

$$x + 2\frac{1}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{ja siis } \; y = 3\,.$$

Sijoitetaan piste $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ parven yhtälöön, saadaan

$$p \cdot \frac{1}{2} - 3 - \frac{1}{2}p + 3 = 0 + 0 = 0, \qquad \text{OK tosi.}$$

2. a) Määritä pisteen $(4, -5)$ etäisyys suorasta $y = -\frac{x}{3} + \frac{9}{5}$. **$(1p)$**

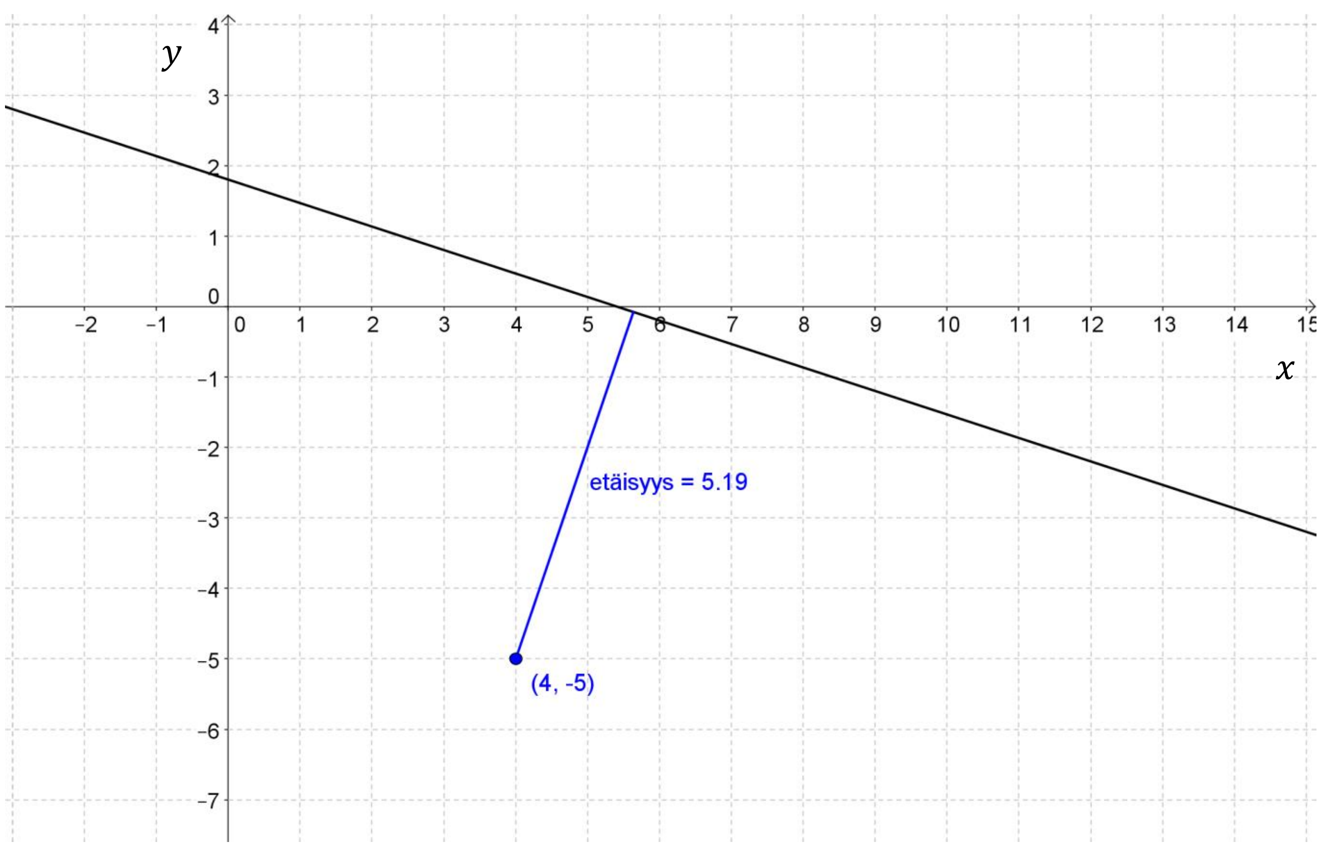
b) Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$ keskipiste ja säde. **$(2p)$**

c) Millä parametrin k arvoilla suora $y = kx$ on paraabelin $y = -x^2 + 6x - 4$ tangentti?

Entä sekantti? **$(3p)$**

a) Suora pitää ensin muuttaa yleiseen muotoon, saadaan: $5x + 15y - 27 = 0$. Sijoitetaan tästä saatavat lukuarvot ”pisteen etäisyys suorasta” – yhtälöön $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Saadaan

$$d = \frac{|5 \cdot 4 + 15 \cdot (-5) - 27|}{\sqrt{5^2 + 15^2}} = \frac{|-82|}{\sqrt{250}} = \frac{82}{5\sqrt{10}} \approx 5{,}186\,135 \ldots \approx 5{,}19 \qquad \left(\frac{82\sqrt{10}}{50}\right)$$



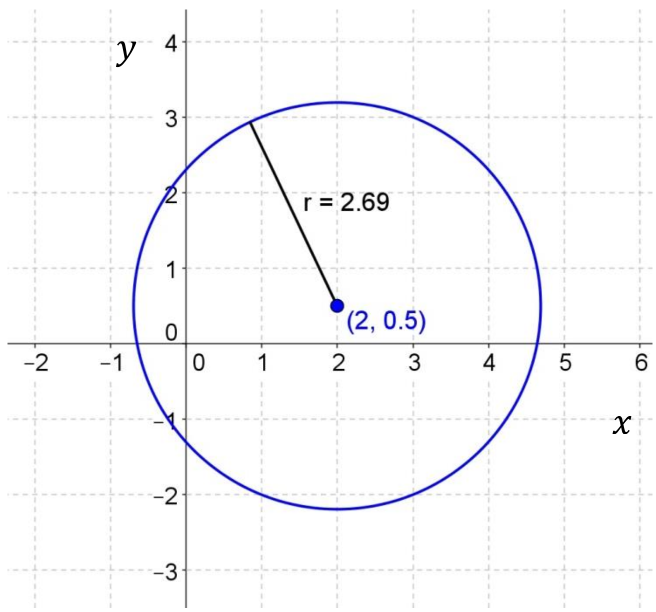
b) Täydennetään/muokataan ympyrä yleisestä muodosta $x^2+y^2-4x-y-3=0$ keskipistemuotoon $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, josta voidaan keskipiste (x_0, y_0) ja säde r lukea suoraan.

$$x^2+y^2-4x-y-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+y^2-y=3$$

$$\overset{\text{lisätään } 4=2^2 \text{ ja } 1/4=(1/2)^2}{\Leftrightarrow} \quad \underbrace{x^2-4x+4}_{=(x-2)^2}+\underbrace{y^2-y+1/4}_{=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=3+4+1/4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\underbrace{29/4}_{=r^2} \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2, \qquad \frac{\sqrt{29}}{2}\approx 2{,}692\,582\ldots$$

Ympyrän keskipiste on $(2,\frac{1}{2})$ ja säde $\frac{\sqrt{29}}{2}\approx 2{,}7$.



c) Määritetään ensin suoran ja paraabelin yhteinen(set) piste(et). Muodostuu yhtälöpari

$$\begin{cases} y=kx \\ y=-x^2+6x-4 \end{cases},$$

josta saadaan yhtälö (ideana $y=y$)

$$kx=-x^2+6x-4 \quad \Rightarrow \quad x^2+(k-6)x+4=0\,.$$

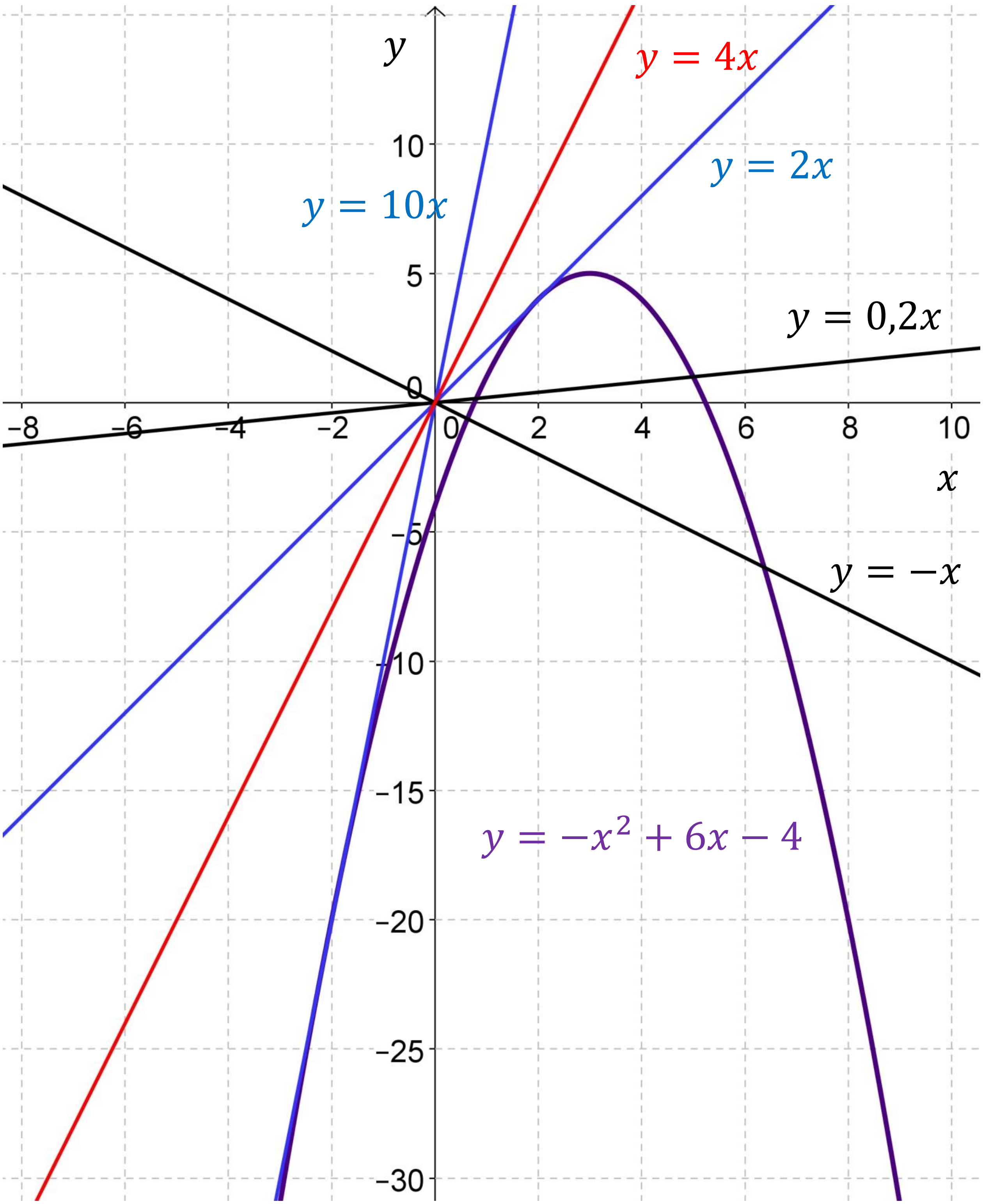
Yhteisiä pisteitä on siis maksimissaan kaksi, minimissään nolla. Lukumäärän antaa diskriminantin tutkiminen. Kun $D>0$, niin ratkaisuja on kaksi ja kyseessä on sekantti, jos $D=0$, niin löytyy vain yksi ratkaisu ja kyseessä on tangentti ja jos $D<0$, niin ei löydy reaalisia ratkaisuja eikä suora näin ollen leikkaa paraabelia ollenkaan.

$$D=(k-6)^2-4\cdot 1\cdot 4=k^2-12k+36-16=k^2-12k+20$$

$$\Longrightarrow \quad D = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 2 \text{ tai } k = 10\,.$$

Lauseke $k^2 - 12k + 20$ kuvaa ylöspäin aukeavaa paraabelia, joka saa positiivisia arvoja, kun $k < 2$ tai $k > 10$ ja negatiivisia arvoja, kun $2 < k < 10$ sekä arvon nolla, kun $k = 2$ tai $k = 10$.

Näin ollen suora $y = kx$ on paraabelille tangentti, kun $k = 2$ tai $k = 10$ ja sekantti, kun $k < 2$ tai $k > 10$, katso kuva alla.



3. Määritä suorasta $2x - 5y + 4 = 0$ ne pisteet, joiden etäisyys suorasta $\frac{y-2}{4} = \frac{x}{3}$ on 3?

VIHJE: Muokkaa ensin suoran esitysmuoto $\frac{y-y_0}{b} = \frac{x-x_0}{a}$ toiseksi. Hyödynnä myös MAOL:a.

Muokataan ensin suora $\frac{y-2}{4} = \frac{x}{3}$ parametrimuodosta normaaliin muotoon, saadaan

$$\frac{y-2}{4} = \frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad 3(y-2) = 4(x-0) \quad \Rightarrow \quad -4x + 3y - 6 = 0\,.$$

Tavoitteena on hyödyntää *pisteen etäisyys suorasta* – kaavaa ja sitä varten todetaan, että pisteen (pisteiden) koordinaattien on toteutettava suoran $2x - 5y + 4 = 0$ yhtälö. Tämän suoran ratkaistu muoto on

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}\,.$$

Koska tarkasteltava piste(et) (x_0, y_0) on tällä suoralla, niin piste toteuttaa suoran yhtälön. Näin ollen

$$y_0 = \frac{2}{5}x_0 + \frac{4}{5}, \quad \text{ja} \quad (x_0, y_0) = \left(x_0,\ \frac{2}{5}x_0 + \frac{4}{5}\right).$$

Sijoitetaan tunnetut tiedot etäisyysyhtälöön $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ole huolellinen minkä suoran kertoimet a, b ja c sijoitat! Saadaan

$$3 = \frac{\left|-4 \cdot x_0 + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}x_0 + \frac{4}{5}\right) - 6\right|}{\sqrt{(-4)^2 + (3)^2}} = \frac{\left|-4x_0 + \frac{6}{5}x_0 + \frac{12}{5} - 6\right|}{\sqrt{16+9}} = \frac{\left|-\frac{14}{5}x_0 - \frac{18}{5}\right|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}|-14x_0 - 18|}{5} = \frac{|-14x_0 - 18|}{25} \quad \Rightarrow \quad 25 \cdot 3 = |-14x_0 - 18|.$$

Siis, kaksi vaihtoehtoa: $-14x_0 - 18 = 75$ ja $-14x_0 - 18 = -75$.

Vaihtoehto 1 ”+75”: Ratkaistaan pisteen koordinaatit.

$$-14x_0 - 18 = 75 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{75+18}{-14} = -\frac{93}{14} \quad \text{ja}$$

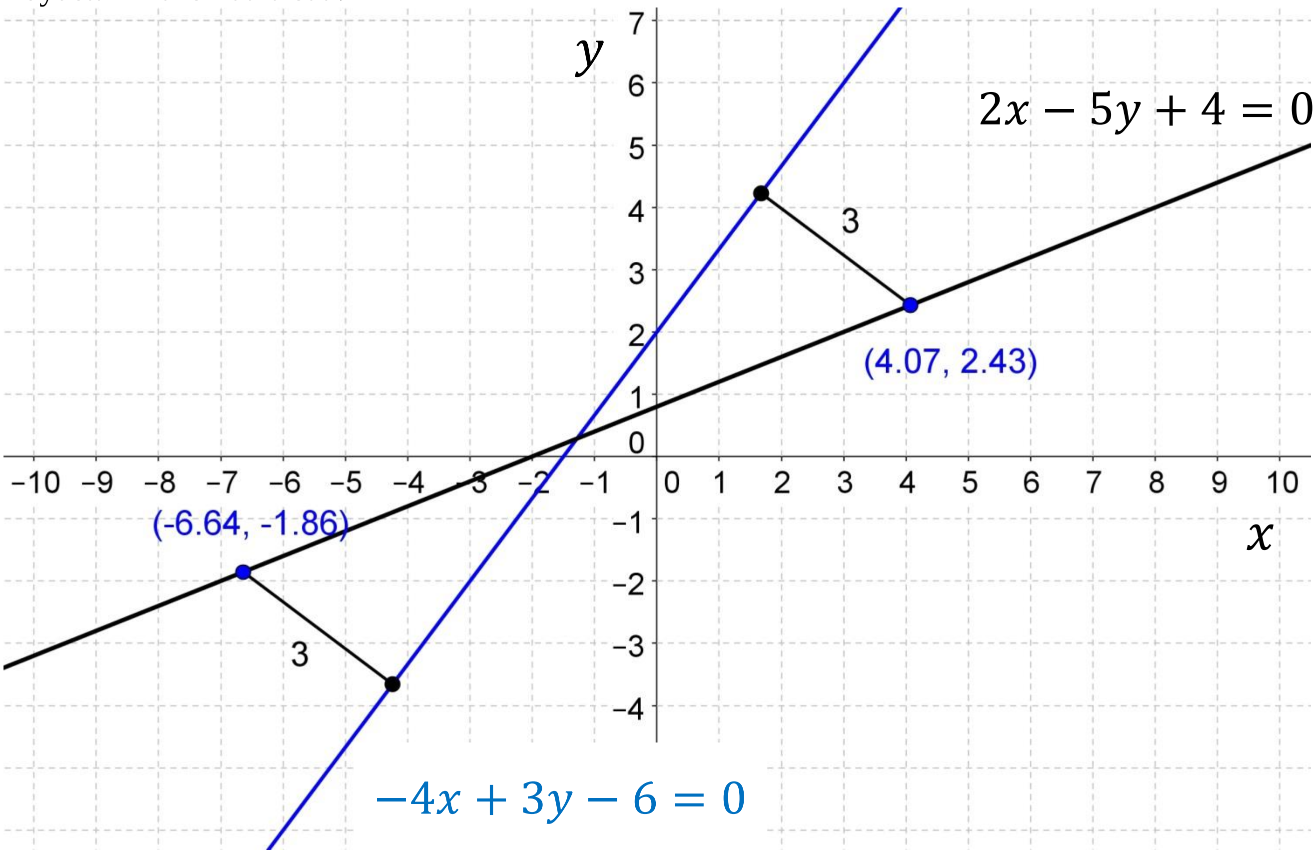
$$y_0 = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{93}{14}\right) + \frac{4}{5} = -\frac{13}{7} \quad \Rightarrow \quad \text{Piste on } \left(-\frac{93}{14}, -\frac{13}{7}\right) \approx (-6{,}64\,;\ -1{,}86)$$

Vaihtoehto 2 ”−75”: Ratkaistaan pisteen koordinaatit. Nyt

$$-14x_0 - 18 = -75 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{-75+18}{-14} = \frac{57}{14} \quad \text{ja}$$

$$y_0 = \frac{2}{5} \cdot \frac{57}{14} + \frac{4}{5} = \frac{17}{7} \quad \Rightarrow \quad \text{Piste on } \left(\frac{57}{14}, \frac{17}{7}\right) \approx (4{,}07\,;\ 2{,}43)$$

Löydettiin kaksi ratkaisua!



4. a) CAS-laskin, MAOL-taulukot ja Maa4-kurssin kirja maksavat yhteensä 91 €. Kolme taulukkokirjaa ja kaksi laskinta maksavat yhteensä 162 €. Viisi kurssikirjaa ja kuusi taulukkokirjaa maksavat yhteensä 169 €.Muodosta yhtälöryhmä ja ratkaise siitä CAS-laskimen hinta. HUOM! Laskimella tehty ratkaisu ilman välivaiheita 0 pistettä, välivaiheet pitää olla näkyvissä. VIHJE Tarkista laskimella!

b) Määritä pisteestä $(2, 2)$ ympyrälle $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 8 = 0$ piirrettyjen tangenttien yhtälöt ja tangenttien välinen kulma. Perustele, pelkkä laskimen antama tulos ei riitä.

a) Merkitään CAS-laskimen hintaa muuttujalla x, MAOL-taulukkokirjaa muuttujalla y ja Maa4-kurssikirjaa muuttujalla z. Tällöin

$$\begin{cases} x + y + z = 91 \\ 2x + 3y = 162 \\ 6y + 5z = 169 \end{cases}.$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia siten, että eliminoidaan muuttuja y, koska se on kaikissa yhtälöissä. Ensimmäiseen yhtälöpariin tulee ylin yhtälö kerrottuna -3:lla ja keskimmäinen yhtälö kerrottuna 1:llä.

Saadaan

$$\begin{cases} -3x - 3y - 3z = -273 \\ \;\;2x + 3y \qquad\;\; = 162 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad -x - 3z = -111\,,$$

Toiseen yhtälöpariin tulee keskimmäinen yhtälö kerrottuna -2:lla ja alin yhtälö kerrottuna 1:llä, eli jälleen eliminoidaan muuttuja y. Saadaan

$$\begin{cases} -4x - 6y \qquad\;\; = -324 \\ \qquad\;\; 6y + 5z = 162 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad -4x + 5z = -155\,.$$

Yhdistetään näin saadut yhtälöt, joissa on vain x:ää ja z:aa. Ja ratkaistaan muodostuva yhtälöpari.

$$\begin{cases} -x - 3z = -111 \\ -4x + 5z = -155 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x = 111 - 3z \quad \downarrow \text{sij.} \\ -4(111 - 3z) + 5z = -155 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad -444 + 12z + 5z = -155\,,$$

$$\Longrightarrow \quad 17z = 289 \quad\Longrightarrow\quad z = 17.$$

Sijoitetaan $z = 17$ jompaankumpaan yhtälöön $\begin{cases} -x - 3z = -111 \\ -4x + 5z = -155 \end{cases}$ ja ratkaistaan x.

$$\Longrightarrow \quad x = 111 - 3 \cdot 17 = 60\,.$$

Lopuksi sijoitetaan $z = 17$ ja $x = 60$ yhtälöön $x + y + z = 91$ ja ratkaistaan y, saadaan

$$\Longrightarrow \quad 60 + y + 17 = 91 \quad\Longrightarrow\quad y = 14\,.$$

Vastaus: CAS-laskimen hinta on 60 €. (Eikä olisi tarvinnut ratkaista taulukkokirjan hintaa y.)

b) Määritetään tangentit, (vrt. kirjan CALCULUS 2 sivu 160/Esim. 3):

Ensin ympyrä polynomimuodosta keskipistemuotoon, jotta saadaan keskipiste esiin.

$$x^2 + y^2 + 6x + 6y + 8 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2}_{(x+3)^2} + \underbrace{y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2}_{(y+3)^2} = -8 + 9 + 9$$

$$\Longrightarrow \quad (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10 = \sqrt{10}^{\,2}$$

Siis, ympyrän keskipiste on $(3,3)$ ja säde $r = \sqrt{10} \approx 3{,}16$. Katso myös kuva alla.

Tangenttien yhtälöt:

$$y - 2 = k(x - 2) \quad\Longrightarrow\quad y = kx - 2k + 2 \quad\Longleftrightarrow\quad \underbrace{-k}_{="a"}\,x + \underbrace{1}_{="b"}\,y + \underbrace{2k - 2}_{="c"} = 0\,.$$

Tangentit ovat säteen etäisyydellä ympyrän keskipisteestä, joten pätee

$$\sqrt{10} = \frac{|-k \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) + 2k - 2|}{\sqrt{(-k)^2 + 1^2}} = \frac{|3k - 3 + 2k - 2|}{\underbrace{\sqrt{k^2 + 1}}_{>0 \text{ aina}}} = \frac{|5k - 5|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$\Longrightarrow \qquad |5k-5| = \sqrt{10}\cdot\sqrt{k^2+1} = \sqrt{10k^2+10}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 5k-5 = \sqrt{10k^2+10} \\ 5k-5 = -\sqrt{10k^2+10} \end{cases} \qquad \text{tai} \qquad (5k-5)^2 = \left(\sqrt{10k^2+10}\right)^2$$

Valitaan jälkimmäinen tapa, jolloin

$$25k^2 - 50k + 25 = 10k^2 + 10 \quad \Longrightarrow \quad 15k^2 - 50k + 15 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5(3k^2 - 10k + 3) = 0$$

$$\overset{\substack{\text{laskin tai} \\ \text{rat.kaava}}}{\Longrightarrow} \qquad k_1 = \frac{1}{3} \qquad k_2 = 3\,.$$

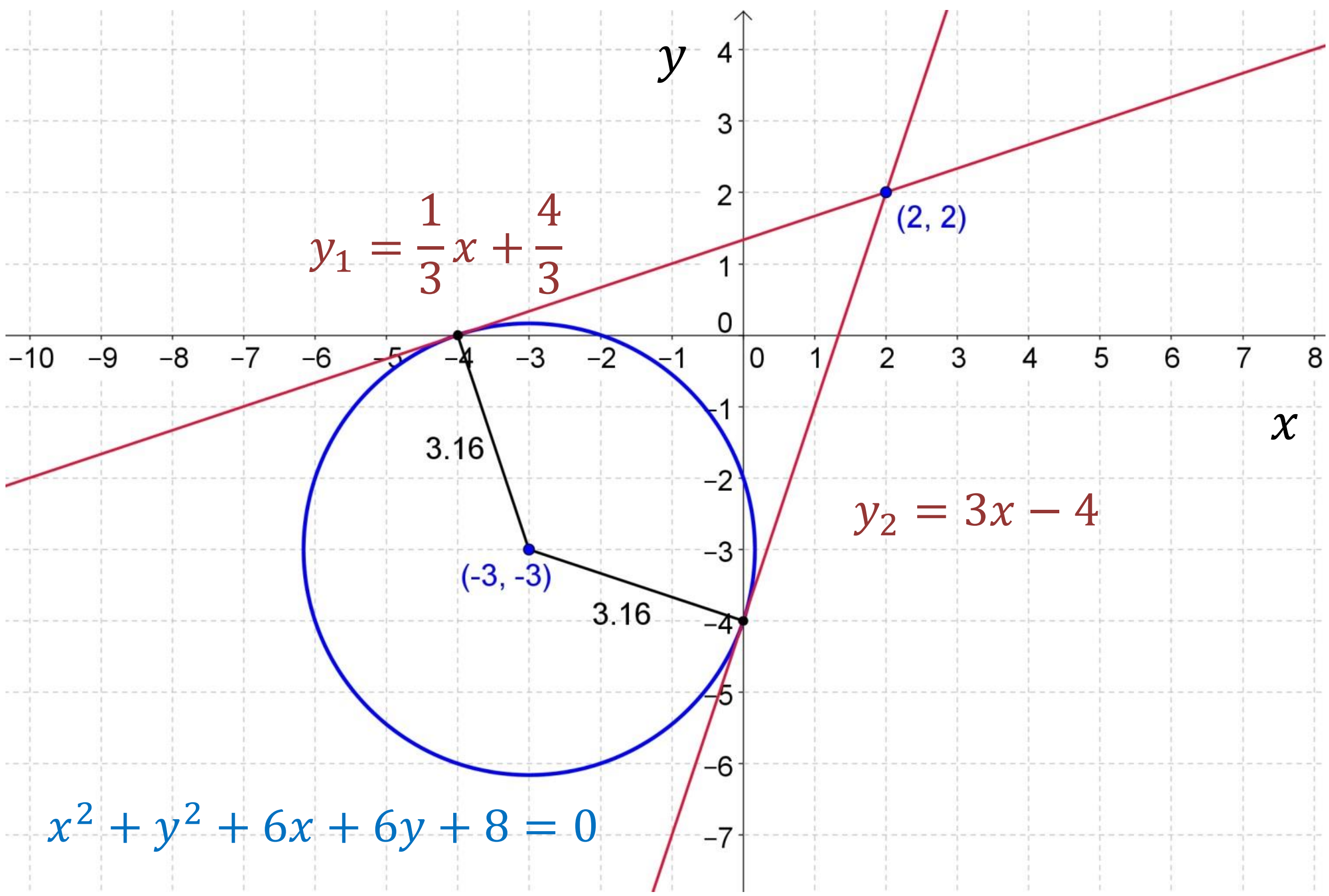
Lisäksi tangenttien yhtälöt ovat, katso myös kuva alla.

$$y_1 = k_1x - 2k_1 + 2 = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \qquad y_2 = k_2x - 2k_2 + 2 = 3x - 4\,.$$

Lopuksi kulma:

$$\Longrightarrow \qquad \tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{3} - 3}{1 + \frac{1}{3}\cdot 3}\right| = \left|\frac{-2\frac{2}{3}}{2}\right| = \left|\frac{-\frac{8}{3}}{2}\right| = \frac{4}{3}$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha = 53{,}130\,...^\circ \approx 53{,}1^\circ$$



5. Suoran maantietunnelin poikkileikkaus on paraabelin muotoinen. Tunnelin korkeus on $7,50$ m ja leveys tienpinnan tasossa $8,10$ m. Kuinka korkea 260 cm leveä rekka-auto mahtuu ajamaan tunnelin läpi keskiviivan oikealla puolella pysyen? [YO S-1997/5.]

Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon siten, että tien pinta on vaaka- eli x-akselilla ja paraabelin akseli (ja näin ollen myös huippu) on pysty- eli y-akselilla (katso kuva alla).

Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + c$ ja tunnetaan kaksi (kolme) paraabelin pistettä (tehtävänannon tietojen perusteella). Huippupiste on $(0;\ 7{,}5)$ ja toisaalta myös piste $(4{,}05; 0)$ ja myös piste $(-4{,}05;\ 0)$. Sijoitetaan koordinaatit paraabelin yhtälöön ja ratkaistaan kertoimet a ja c. Saadaan

$$\begin{cases} 7{,}5 = a \cdot 0^2 + c \\ 0 = a \cdot 4{,}05^2 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 7{,}5 \ \downarrow \text{sij.} \\ -4{,}05^2 \cdot a = 7{,}5 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{7{,}5}{-4{,}05^2} \approx -0{,}457\,247\,\ldots$$

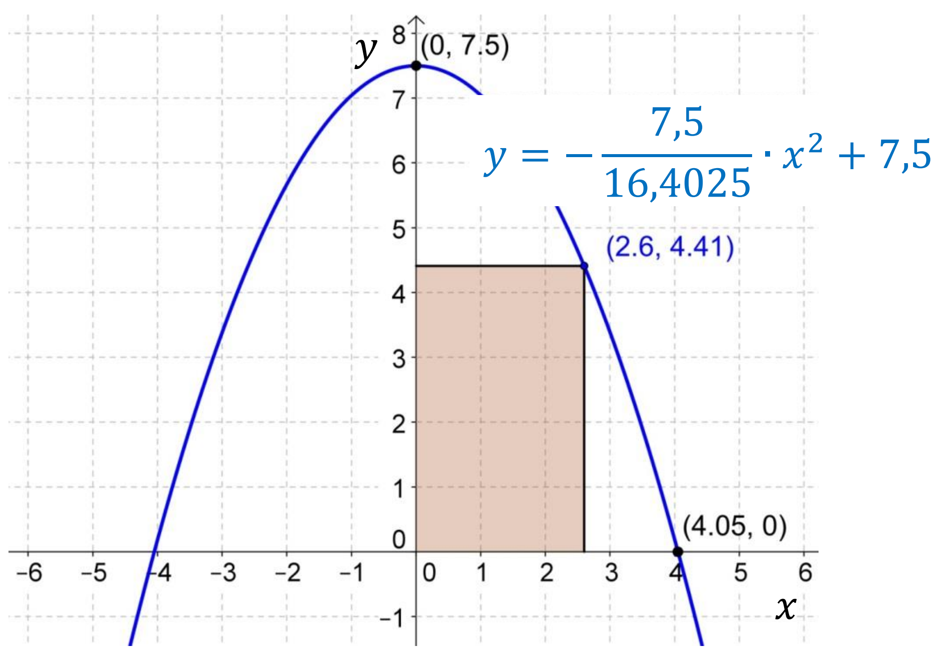
Näin ollen paraabelin yhtälöksi tulee

$$y = -\frac{7{,}5}{16{,}4025} \cdot x^2 + 7{,}5 \approx -0{,}4572x^2 + 7{,}5\,.$$

Nyt korkeimman mahdollisen rekan, joka voi kulkea tunnelissa, vasen kylki on y-akselilla ja oikea ylänurkka paraabelilla. Kun $x = 2{,}60$ (m), niin

$$y = -\frac{7{,}5}{16{,}4025} \cdot 2{,}60^2 + 7{,}5 \approx 4{,}409\,007\,\ldots \approx 4{,}40 \text{ m}.$$

On järkevää pyöristää alaspäin ja nimenomaan kahdella desimaalilla, sillä jos vain 4,4 m, niin rekan pyöristämätön arvo voisi olla jopa 4,45 m, joka on liikaa.



6. Ratkaise yhtälö/epäyhtälö. Perustele, eli välivaiheet näkyviin. Pelkkä laskimen antama tulos ei riitä.

a) $\boldsymbol{|x^2 - 6| = 5x}$ $\quad\quad$ $(\boldsymbol{2p})$

b) $\boldsymbol{2|x| + |x - 1| < 3}$ $\quad\quad$ $(\boldsymbol{4p})$

a) Yhtälö on muotoa $|f(x)| = g(x)$. Aluksi pitää muistaa määrittelyehto tarkistaa, siis $5x \geq 0$ eli $x \geq 0$. Tämäntyyppinen itseisarvoyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}.$$

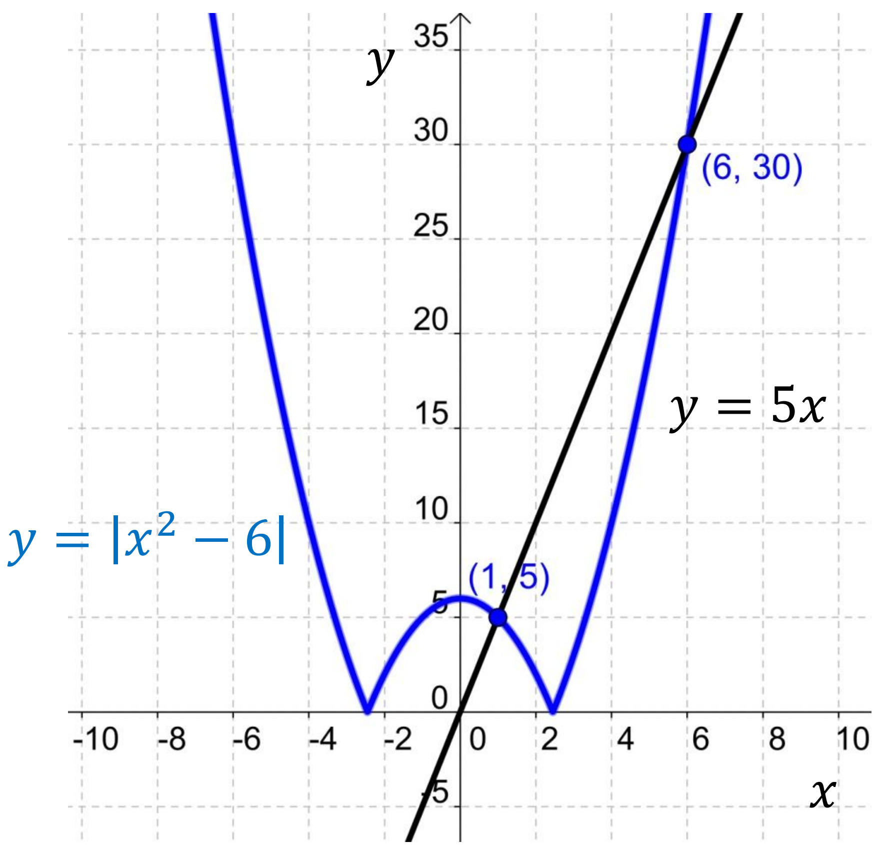
Ratkaistava on siis yhtälöt:

$$\begin{cases} x^2 - 6 = 5x \\ x^2 - 6 = -5x \end{cases}, \qquad x \geq 0.$$

Saadaan

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-6)(x+1) = 0 \\ (x+6)(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \quad \text{tai} \quad x = -1 \\ x = -6 \quad \text{tai} \quad x = 1 \end{cases}$$

Näistä ratkaisuista vain ei-negatiiviset eli $x = 6$ ja $x = 1$ hyväksytään (määrittelyehto). Katso myös kuva alla.



b) Koska epäyhtälöstä löytyy enemmän kuin yksi itseisarvo, käytetään lokerointiperiaatetta. Sitä varten aukaistaan itseisarvot:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}, \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x-1 \geq 0 \text{ eli } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{kun } x-1 < 0 \text{ eli } x < 1 \end{cases},$$

näin ollen lausekkeiden vaihtumiskohdat ovat 0 ja 1 sekä tarkasteluvälit

$$]-\infty, 0[, \qquad [0,1[, \qquad [1, \infty[\,.$$

Kun $x < 0$.

$$2(-x) + (1-x) < 3 \quad \Rightarrow \quad -3x < 2 \quad \Rightarrow \quad x > -2/3,$$

ja ehto huomioiden saadaan ratkaisuväli $-\frac{2}{3} < x < 0$.

Kun $0 \leq x < 1$.

$$2(x) + (1-x) < 3 \quad \Rightarrow \quad x < 2,$$

ja ehto huomioiden saadaan ratkaisuväli $0 \leq x < 1$.

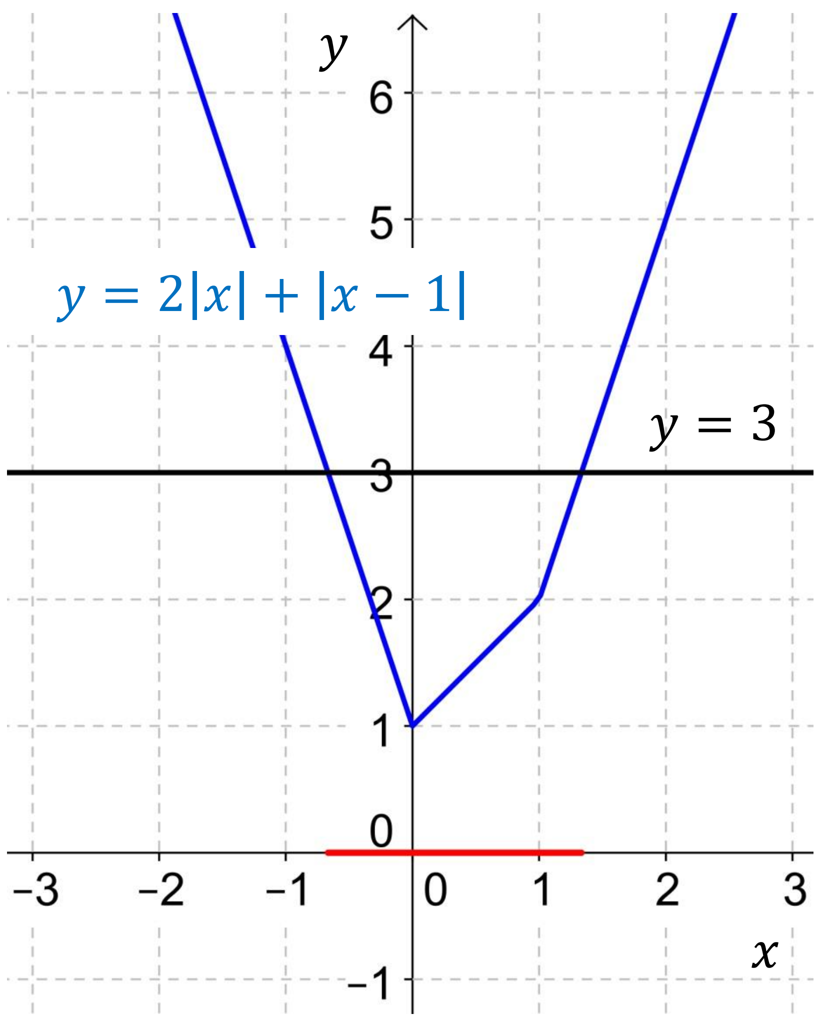
Kun $1 \leq x$.

$$2(x) + (x-1) < 3 \quad \Rightarrow \quad 3x < 4$$
$$\Rightarrow \quad x < 4/3,$$

ja ehto huomioiden saadaan ratkaisuväli $1 \leq x < 4/3$.

Kaikki välit voidaan lopuksi yhdistää ja saadaan lopullinen vastaus (katso myös kuva)

$$-\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}.$$



7. a) Laske ympyröiden $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 3x - y - 20 = 0$ yhteisen jänteen pituus.

b) Millä vakion a arvoilla suorat $ax - 2y + 4 = 0$ ja $x + 2y + ay = 0$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

a) Määritetään ensin annettujen ympyröiden leikkauspisteet yhtälöparista (idea: millä x pätee $y = y$)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x - y - 20 = 0 \end{cases}.$$

Hyödynnetään yhteenlaskutekniikkaa ja vähennetään ylemmästä alempi, siis

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x - y - 20 = 0 \mid \cdot (-1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0 \\ -x^2 - y^2 - 3x + y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -3x - y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -3x - 4$$

Sijoitetaan näin saatu y yhtälöön $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$, jolloin

$$x^2 + (-3x - 4)^2 - 2(-3x - 4) - 24 = 0 \quad \Rightarrow \dots \Rightarrow \quad x^2 + 3x = 0.$$

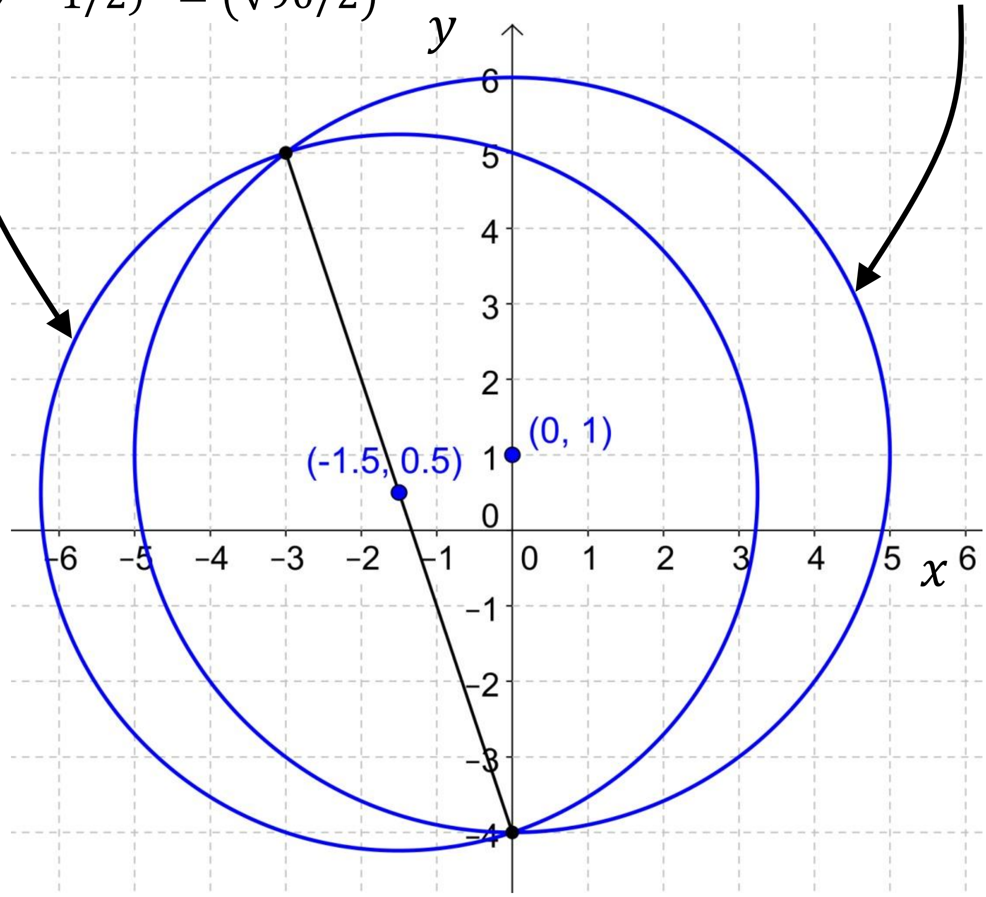
Ratkaisuiksi saadaan $x = 0$ ja $x = -3$.

Kun $x = 0$ niin $y = -3 \cdot 0 - 4 = -4$ ja kun $x = -3$ niin $y = -3 \cdot (-3) - 4 = 5$. Ympyröiden leikkauspisteet ovat näin ollen $(0, -4)$ ja $(-3,5)$. Tästä saadaan yhteisen jänteen (joka samalla on pienemmän ympyrän $x^2 + y^2 + 3x - y - 20 = 0$ halkaisija) pituus

$$d_{\text{yhteinen jänne}} = \sqrt{(0+3)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \approx 9{,}487\,.$$

$$x^2 + y^2 + 3x - y - 20 = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(x + 3/2)^2 + (y - 1/2)^2 = \left(\sqrt{90}/2\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$



b) Määritetään suorien kulmakertoimet ja hyödynnetään kohtisuorille suorille tulosta

$$k_1 k_2 = -1\,.$$

Suorat ilmoitettuna ratkaistussa muodossa:

$$ax - 2y + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{a}{2}x + \frac{4}{2} = \frac{a}{2}x + 2,$$

$$x + 2y + ay = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (2 + a)y = -x \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{1}{2 + a}x + 0, \qquad a \neq -2\,.$$

Siis kulmakertoimet ovat $k_1 = \frac{a}{2}$ ja $k_2 = -\frac{1}{2+a}$. Millä a tulon $k_1 k_2$ arvo on -1?

$$k_1 k_2 = \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2 + a}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{4 + 2a} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 4 + 2a \quad \Rightarrow \quad a = -4, \qquad \text{OK} - 4 \neq -2$$

8. JOKERI (9p)

a) Pisteen $(2, 1)$ kautta kulkeva suora muodostaa positiivisten koordinaattiakseleiden kanssa kolmion, jonka pinta-ala on 12. Määritä suoran yhtälö. Perustele. **$(4p)$**

b) Fazerilta on tullut kaksi uutta suklaalevymakua: Karpalo-kompassi ja Suopursu-suunnistaja. Yhteen Karpalo-kompassi suklaalevyyn tarvitaan 3 desilitraa karpaloita, 3 desilitraa sokeria ja 2 desilitraa kaakaomassaa. Vastaavasti yhteen Suopursu-suunnistaja suklaalevyyn tarvitaan 1 desilitra karpaloita, 2 desilitra sokeria ja 5 desilitraa kaakaomassaa.

Liike pystyy päivittäin hankkimaan 24 litraa karpaloita, 26 litraa sokeria ja 33 litraa kaakaomassaa. Auta suklaamestari Pekkaa selvittämään kuinka paljon kumpaakin suklaalevyä olisi järkevintä valmistaa päivittäin (voiton maksimoimiseksi), kun yhdestä Karpalo-kompassi suklaalevystä liike saa voittoa 4 euroa ja yhdestä Suopursu-suunnistaja suklaalevystä 3 euroa?

OHJE: Tee aluksi taulukko ja muodosta voittoa kuvaava laskulauseke. **$(5p)$**

a) Suora $y - y_0 = k(x - x_0)$ kulkee pisteen $(2,1)$ kautta, joten sen yhtälö on muotoa

$$y - 1 = k(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = kx - 2k + 1.$$

Koska kyseessä on kolmio, joka muodostuu ensimmäiseen neljännekseen, saadaan kolmion korkeus suoran ja y-akselin leikkauspisteestä ja vastaavasti kolmion kanta suoran ja x-akselin leikkauspisteestä.

korkeus: $y = k \cdot 0 - 2k + 1 = 1 - 2k,$ kanta: $0 = k \cdot x - 2k + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2k-1}{k},$ $k \neq 0.$

Kolmion ala tiedetään olevan 12, joten

$$A_{\text{kolmio}} = 12 = \frac{1}{2} \cdot \text{kanta} \cdot \text{korkeus} \quad \Rightarrow \quad 24 = \frac{2k-1}{k} \cdot (1 - 2k) \quad \Rightarrow \quad 24k = -4k^2 + 4k - 1$$

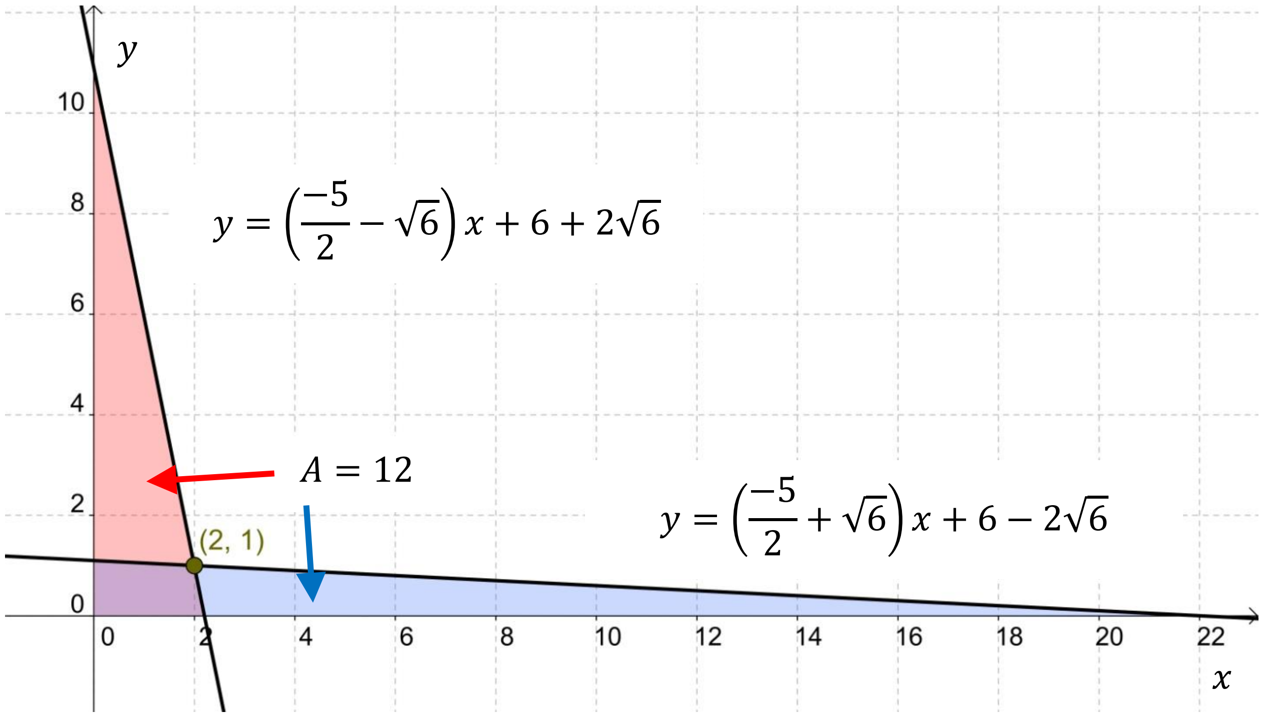
$$\Rightarrow \quad 4k^2 + 20k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{-5}{2} - \sqrt{6} \ \lor \ k = \frac{-5}{2} + \sqrt{6}.$$

Siis kaksi suoraa! Näiden yhtälöt ovat:

$$y = \left(\frac{-5}{2} - \sqrt{6}\right)x - 2\left(\frac{-5}{2} - \sqrt{6}\right) + 1 = \left(\frac{-5}{2} - \sqrt{6}\right)x + 6 + 2\sqrt{6},$$

$$y = \left(\frac{-5}{2} + \sqrt{6}\right)x - 2\left(\frac{-5}{2} + \sqrt{6}\right) + 1 = \left(\frac{-5}{2} + \sqrt{6}\right)x + 6 - 2\sqrt{6}.$$

Katso myös kuva (alla).



b) Kootaan tiedot taulukkoon:

	Karpalo-kompassi	Suopursu-suunnistaja	Saatavissa
Karpaloita (dl)	3	1	240
Sokeria (dl)	3	2	260
Kaakaomassaa (dl)	2	5	330
Voitto (€)	4	3	

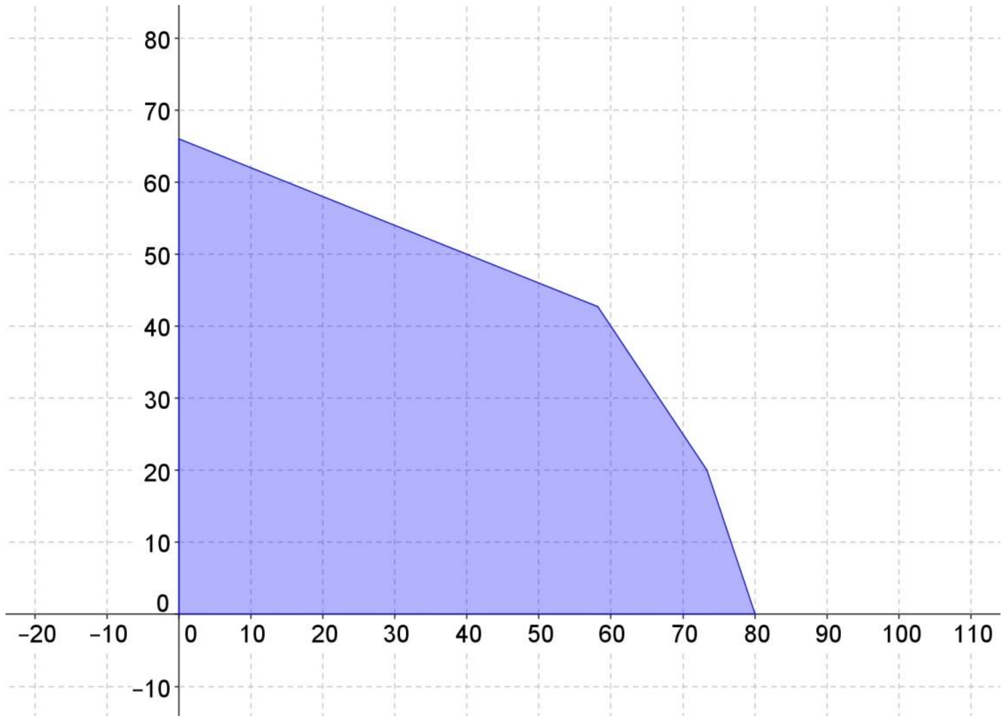
Jos valmistetaan x kappaletta Karpalo-kompassi suklaalevyjä ja y kappaletta Suopursu-suunnistaja suklaalevyjä, niin voitto saadaan lausekkeesta $4x + 3y$ (€).

Toisaalta, jotta raaka-aineet riittäisivät, täytyy päteä $3x + y \leq 240$ ja vastaavasti $3x + 2y \leq 260$ sekä $2x + 5y \leq 330$. Lisäksi tietysti ehdot $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ on oltava voimassa.

Pitää siis etsiä sellaiset x ja y, joilla funktio $f: f(x, y) = 4x + 3y$ saa suurimman arvon, kunhan yllä olevat ehdot

$$3x + y \leq 240, \qquad 3x + 2y \leq 260, \qquad 2x + 5y \leq 330, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0$$

ovat voimassa. Nämä ehdot vastaavat tason aluetta

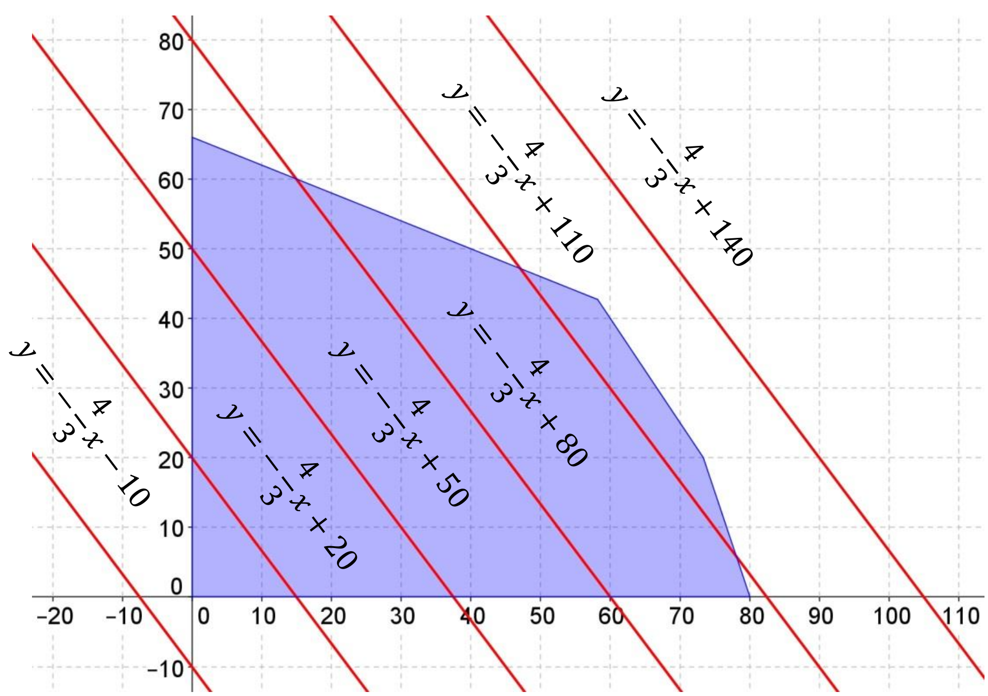


Haluttu piste (x, y) on oltava väritetyssä alueessa! Tarkastellaan yhdensuuntaisia suoria

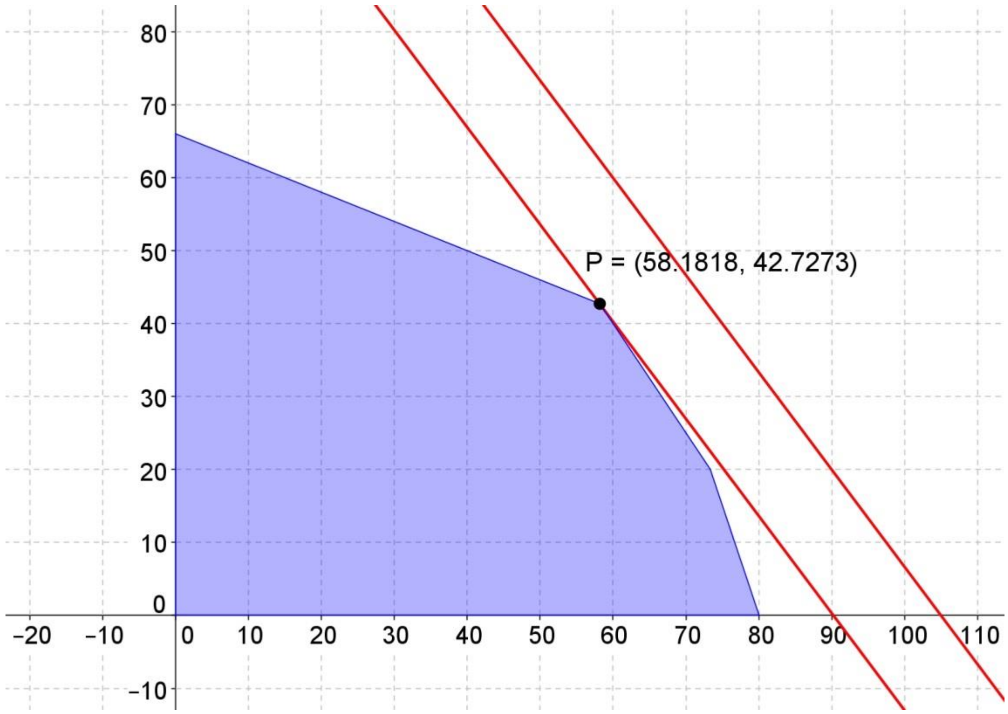
$$4x + 3y = c, \;\; c > 0$$

muuttujan c, joka kuvaa siis voittoa, eri arvoilla.

$$4x + 3y = c \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \tilde{c}, \qquad \tilde{c} = \tfrac{c}{3}$$



Osa suorista kohtaa alueen ja osa ei. Tämä tarkoittaa sitä, että vain tietyt voitot ovat mahdollisia! Siis, suurimmalla $\tilde{c} = \frac{c}{3}$:n arvolla saadaan suurin voitto → Minkä pisteen kautta ko. suora kulkee, koordinaatit?



Tavoitesuoran ensi kohtaaminen alueen kanssa tapahtuu pisteessä P, joka on siis kahden suoran leikkauspiste. Pisteen P koordinaatit saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x + 2y = 260 \\ 2x + 5y = 330 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \overbrace{\ldots}^{\text{TI−Nspire}} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{640}{11} = 58\dfrac{2}{11} \approx 58{,}1818\ldots \\ y = \dfrac{470}{11} = 42\dfrac{8}{11} \approx 42{,}7272\ldots \end{cases}$$

Toisaalta pisteen P koordinaatit toteuttavat myös halutun suoran $y = -\frac{4}{3}x + \tilde{c}$ yhtälön, eli

$$42\frac{8}{11} = -\frac{4}{3} \cdot 58\frac{2}{11} + \tilde{c} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{c} = 42\frac{8}{11} + \frac{4}{3} \cdot 58\frac{2}{11} = 120\frac{10}{33} = \frac{3970}{33} = 120{,}\overline{30}.$$

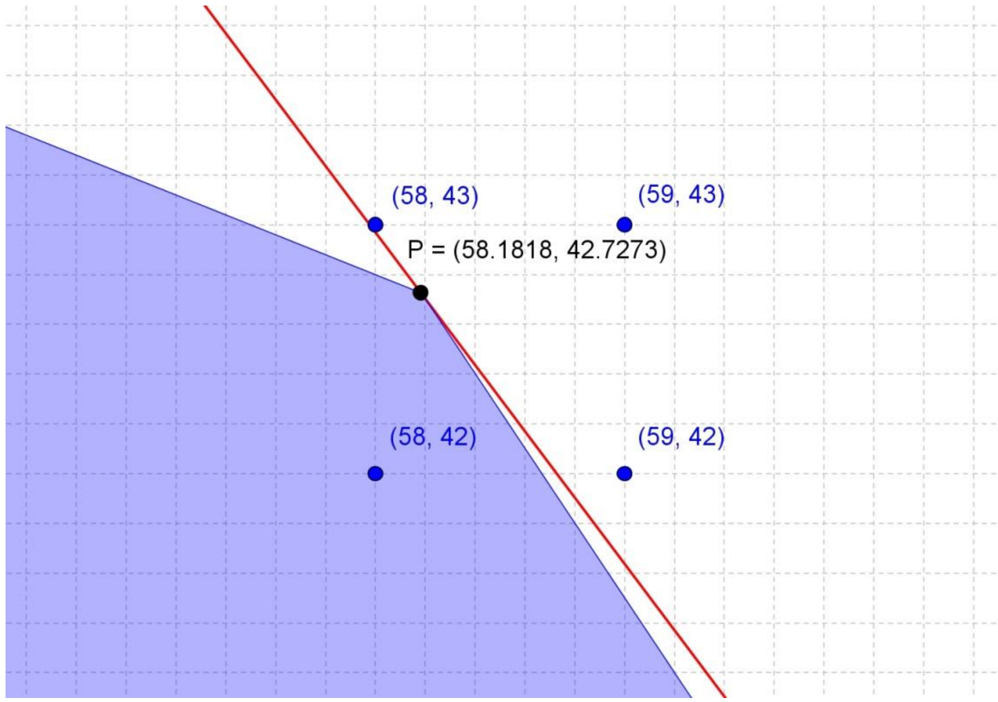
Edelleen, voitoksi saadaan

$$\Longrightarrow \quad c = 3 \cdot \tilde{c} = 360{,}\overline{90}\ \text{€}\,.$$

Pisteen P koordinaatit eivät olleet kokonaislukuja, mutta muuttujat x ja y olivat suklaalevyjen lukumääriä, eli niiden pitää olla kokonaislukuja. Näin ollen, on laskettava funktion

$$f : f(x, y) = 4x + 3y$$

arvot pisteen $P = \left(58\frac{2}{11}, 42\frac{8}{11}\right)$ lähimmissä kokonaislukupisteissä, eli pisteissä $(58{,}42)$, $(59{,}42)$, $(58{,}43)$ ja $(59{,}43)$.



Näistä vain piste $(58{,}42)$ kuuluu alueeseen ja muut eivät, joten saadaan

$$f(58,\ 42) = 4 \cdot 58 + 3 \cdot 42 = 358\ €.$$

Muilla pisteillä saadaan

$$f(58,\ 43) = 4 \cdot 58 + 3 \cdot 43 = 361\ €,$$

$$f(59,\ 42) = 4 \cdot 59 + 3 \cdot 42 = 362\ €,$$

$$f(59,\ 43) = 4 \cdot 59 + 3 \cdot 43 = 365\ €.$$

Siis Karpalo-kompassi suklaalevyjä on valmistettava 58 kappaletta ja Suopursu-suunnistaja suklaalevyjä 42 kappaletta, jolloin liike saa voittoa 358 €.