Matematiikan kurssikoe, Maa4 – Vektorit – RATKAISUT **Sievin lukio**
Keskiviikko 12.4.2017

VASTAA YHTEENSÄ VIITEEN TEHTÄVÄÄN! MAOL JA LASKIN/LASKINOHJELMAT OVAT SALLITTUJA!

1. Olkoot vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ seuraavasti määritelty:

$$\bar{a} = -2\bar{j} - \bar{k}, \qquad \bar{b} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + 8\bar{k}, \qquad \bar{c} = 6\bar{i} + 12\bar{j} - 3\bar{k}$$

a) Määritä vektori

$$\bar{r} = -3\bar{a} - \bar{b} + \frac{5}{3}\bar{c}\,.$$

sekä laske sen pituus.

b) Ovatko vektorit $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan?

c) Määritä $\bar{a}^{\mathrm{o}}$.

a) Vektorin skalaarilla kertomisen ja vektoreiden yhteenlaskun nojalla saadaan

$$\bar{r} = -3\bar{a} - \bar{b} + \frac{5}{3}\bar{c} = -3\underbrace{\left(-2\bar{j} - \bar{k}\right)}_{=\bar{a}} - \underbrace{\left(-2\bar{i} + 3\bar{j} + 8\bar{k}\right)}_{=\bar{b}} + \frac{5}{3}\underbrace{\left(6\bar{i} + 12\bar{j} - 3\bar{k}\right)}_{=\bar{c}}$$
$$= 6\bar{j} + 3\bar{k} + 2\bar{i} - 3\bar{j} - 8\bar{k} + 10\bar{i} + 20\bar{j} - 5\bar{k} = 12\bar{i} + 23\bar{j} - 10\bar{k}.$$

Siis

$$\bar{r} = -3\bar{a} - \bar{b} + \frac{5}{3}\bar{c} = 12\bar{i} + 23\bar{j} - 10\bar{k}.$$

Pituus $|\bar{r}| = \sqrt{12^2 + 23^2 + (-10)^2} = \sqrt{773} \approx 27{,}802.$

b) Vektoreiden $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ mahdollinen kohtisuoruus voidaan todeta pistetulon kautta, sillä $\bar{b} \neq \bar{0} \neq \bar{c}$. Koska

$$\bar{b} \bullet \bar{c} = \left(-2\bar{i} + 3\bar{j} + 8\bar{k}\right) \bullet \left(6\bar{i} + 12\bar{j} - 3\bar{k}\right)$$
$$= -2 \cdot 6 + 3 \cdot 12 + 8 \cdot (-3) = -12 + 36 - 24 = 0,$$

niin vektorit $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

c) Yksikkövektori on vektori jaettuna omalla pituudellaan, siis

$$\bar{a}^{\mathrm{o}} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{-2\bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{-2\bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{k}.$$

2. a) Määritä pisteen $\boldsymbol{M = (-7, 5, 22)}$ projektiopiste ja etäisyys i) $\boldsymbol{y}$-akselista, ii) $\boldsymbol{xz}$-tasosta. (1p)

b) Mitä voidaan tietää vektoreista $\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}$ ja $\bar{\boldsymbol{z}}$ alla olevan pistetulon taulukon avulla? Perustele. (2p)

$\bullet$	$\bar{\boldsymbol{x}}$	$\bar{\boldsymbol{y}}$	$\bar{\boldsymbol{z}}$
$\bar{\boldsymbol{x}}$	**3**	**0**	$\boldsymbol{\sqrt{2}}$
$\bar{\boldsymbol{y}}$	**0**	**4**	**0**
$\bar{\boldsymbol{z}}$	$\boldsymbol{\sqrt{2}}$	**0**	**9**

missä esim. $\bar{\boldsymbol{x}} \bullet \bar{\boldsymbol{z}} = \sqrt{2}$.

c) Olkoot $\bar{\boldsymbol{c}} = -\bar{\boldsymbol{\imath}} - 2\bar{\boldsymbol{\jmath}}$, $\bar{\boldsymbol{u}} = 2\bar{\boldsymbol{\imath}} + \bar{\boldsymbol{\jmath}}$ ja $\bar{\boldsymbol{v}} = 3\bar{\boldsymbol{\imath}} + 2\bar{\boldsymbol{\jmath}}$ tason vektoreita ja $(\bar{\boldsymbol{\imath}}, \bar{\boldsymbol{\jmath}})$ tason standardikanta. Määritä vektorin $\bar{\boldsymbol{c}}$ koordinaatit kannassa $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})$. (3p)

a) Projektiopisteet ovat **i)** $M' = (0, 5, 0)$ ja **ii)** $M'' = (-7, 0, 22)$. Etäisyydet (Pythagorasta hyödyntäen) ovat

i) $\sqrt{(-7)^2 + (22)^2} = \sqrt{533} \approx 23{,}1$ ja **ii)** y-koordinaatti eli 5.

b) Pituudet tiedetään: Vektorin $\bar{x}$ pituus on $|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \bullet \bar{x}} = \sqrt{3}$. Vektorin $\bar{y}$ pituus on $|\bar{y}| = \sqrt{\bar{y} \bullet \bar{y}} = \sqrt{4} = 2$ ja vektorin $\bar{z}$ pituus on $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z} \bullet \bar{z}} = \sqrt{9} = 3$.

Vektorien välisistä kulmista tiedetään seuraavaa: Vektorin $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ välinen kulma on 90°, koska $\bar{x} \bullet \bar{y} = 0$. Samoin Vektorin $\bar{y}$ ja $\bar{z}$ välinen kulma on 90°, koska $\bar{y} \bullet \bar{z} = 0$. Vektorin $\bar{x}$ ja $\bar{z}$ välisestä kulmasta tiedetään se, että se on alle 90°, ja tarkemminkin sillä $\cos(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\bar{x} \bullet \bar{z}}{|\bar{x}||\bar{z}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 3} \approx 0{,}2721 \ldots$, josta $\sphericalangle(\bar{x}, \bar{z}) = 74{,}20 \ldots°$.

c) Pitää siis etsiä reaaliluvut r ja s siten, että

$$\bar{c} = r\bar{u} + s\bar{v}, \qquad s, r \in \mathbb{R}\,.$$

Sijoitetaan, saadaan

$$-\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} = r(2\bar{\imath} + \bar{\jmath}) + s(3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) = (2r + 3s)\bar{\imath} + (r + 2s)\bar{\jmath}$$

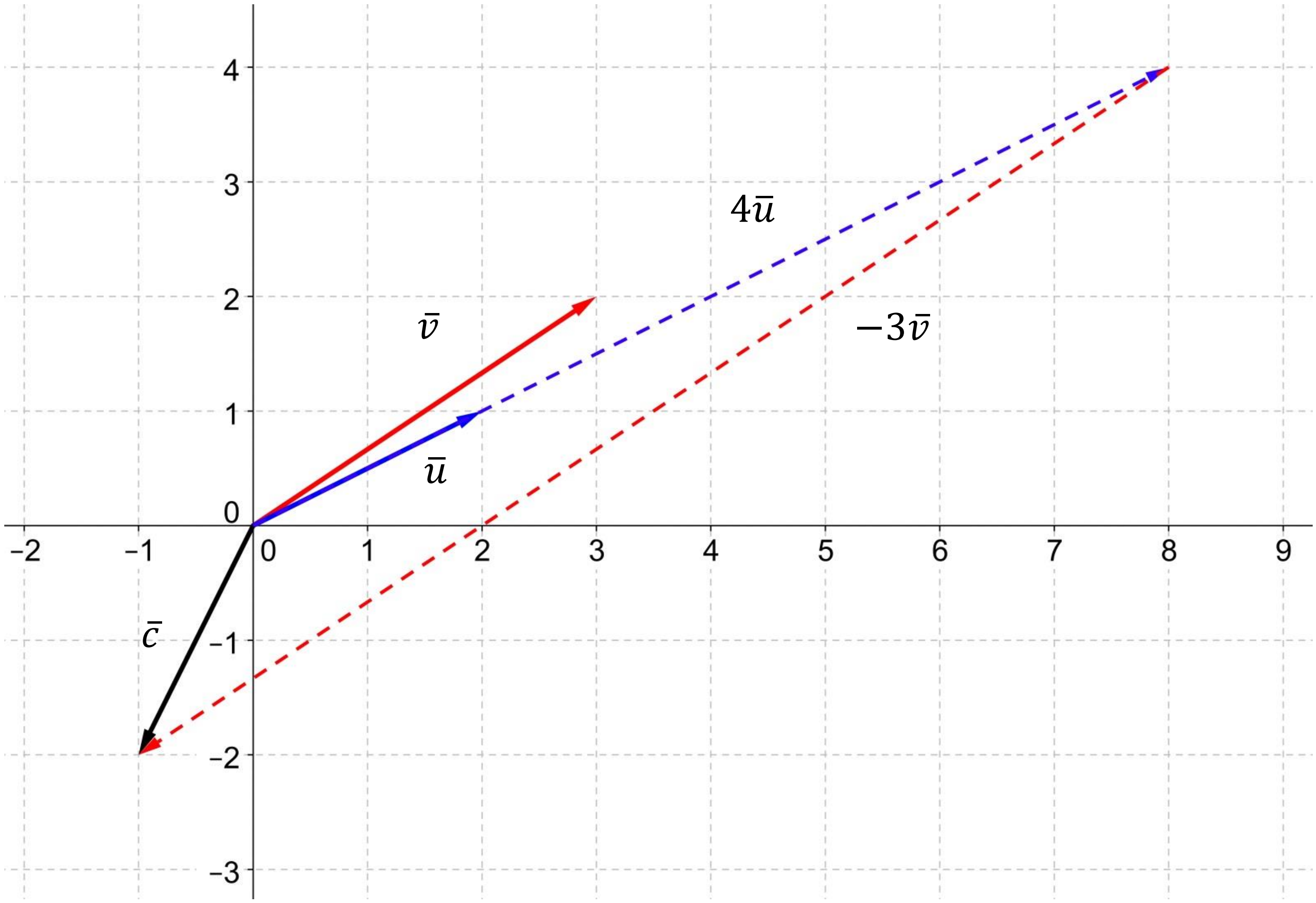
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -1 = 2r + 3s \\ -2 = r + 2s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -1 = 2(-2 - 2s) + 3s \\ \;\; r = -2 - 2s \quad \uparrow \text{sij.} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1 = -4 - 4s + 3s = -4 - s$$

$$\Rightarrow \quad s = -3 \qquad \Rightarrow \quad r = -2 - 2(-3) = 4$$

Siis

$$\bar{c} = 4\bar{u} - 3\bar{v},$$

ja vektorin $\bar{c}$ kysytyt koordinaatit kannassa $(\bar{u}, \bar{v})$ ovat 4 ja -3. Kuva alla.



3. a) Olkoon $A = (-2, 4)$ ja $B = (3, 3)$. Määritä sellainen janan AB piste P, että $\colon PB = 3 \colon 1$. (1p)

b) Olkoot $\bar{u} = k\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$ ja $\bar{v} = -9\bar{\imath} + k\bar{\jmath}$. Määritä $k \in \mathbb{R}$ siten, että $\bar{u} \parallel \bar{v}$. (2p)

c) Määritä pisteen $M = (18, 35, 22)$ projektiopiste ja etäisyys suorasta l: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 6t \\ z = 4 - 4t \end{cases}$, $\in \mathbb{R}$. Hahmota/Piirrä kuva tilanteesta geogebralla ja liitä se ratkaisuusi. (3p)

a) Tiedetään, että

$$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad \overline{AP} = \frac{3}{4}\overline{AB},$$

joten pisteen P paikkavektori on

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + \frac{3}{4}\overline{AB} = -2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + \frac{3}{4}(5\bar{\imath} - \bar{\jmath}) = \frac{7}{4}\bar{\imath} + \frac{13}{4}\bar{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \text{piste } P = \left(\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right)$$

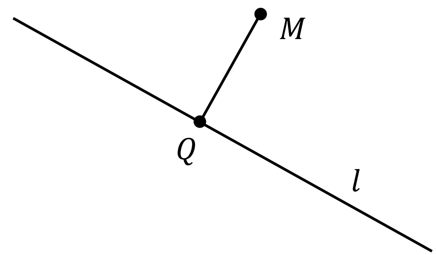
b) Yhdensuuntaisuuslause antaa: $\bar{u} \parallel \bar{v} \iff \bar{u} = t\bar{v}, \in \mathbb{R}$. Näin ollen

$$\bar{u} \parallel \bar{v} \iff k\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} = t(-9\bar{\imath} + k\bar{\jmath}) \implies \begin{cases} k = -9t \\ -4 = kt \end{cases} \implies -4 = -9t \cdot t$$

$$\implies t = \pm\frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad k = \mp 6.$$

Siis, kun $k = 6$ tai $k = -6$, niin $\bar{u} \parallel \bar{v}$.

c) Kuva ja idea→



Olkoon suoran l piste Q pisteen M projektiopiste. Tällöin jollakin $t \in \mathbb{R}$ pätee

$$Q = (-1 + 3t, 2 + 6t, 4 - 4t)$$

Muodostetaan vektori $\overline{QM}$ tai yhtähyvin $\overline{MQ}$.

$$\overline{QM} = [18 - (-1 + 3t)]\bar{\imath} + [35 - (2 + 6t)]\bar{\jmath} + [22 - (4 - 4t)]\bar{k}$$

$$= (19 - 3t)\bar{\imath} + (33 - 6t)\bar{\jmath} + (18 + 4t)\bar{k}$$

Parametrin t ratkaisemiseksi hyödynnetään tietoa $\overline{QM} \bullet \bar{s} = 0$, missä $\bar{s} = 3\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - 4\bar{k}$ on suoran l suuntavektori. Saadaan

$$\overline{QM} \bullet \bar{s} = 3 \cdot (19 - 3t) + 6 \cdot (33 - 6t) - 4 \cdot (18 + 4t) = 0$$

$$\implies \quad 57 - 9t + 198 - 36t - 72 - 16t = 0$$

$$\implies \quad -61t = -183$$

$$\implies \quad t = 3$$

Näin ollen

$$Q = (-1 + 3 \cdot 3, 2 + 6 \cdot 3, 4 - 4 \cdot 3) = (8, 20, -8)$$

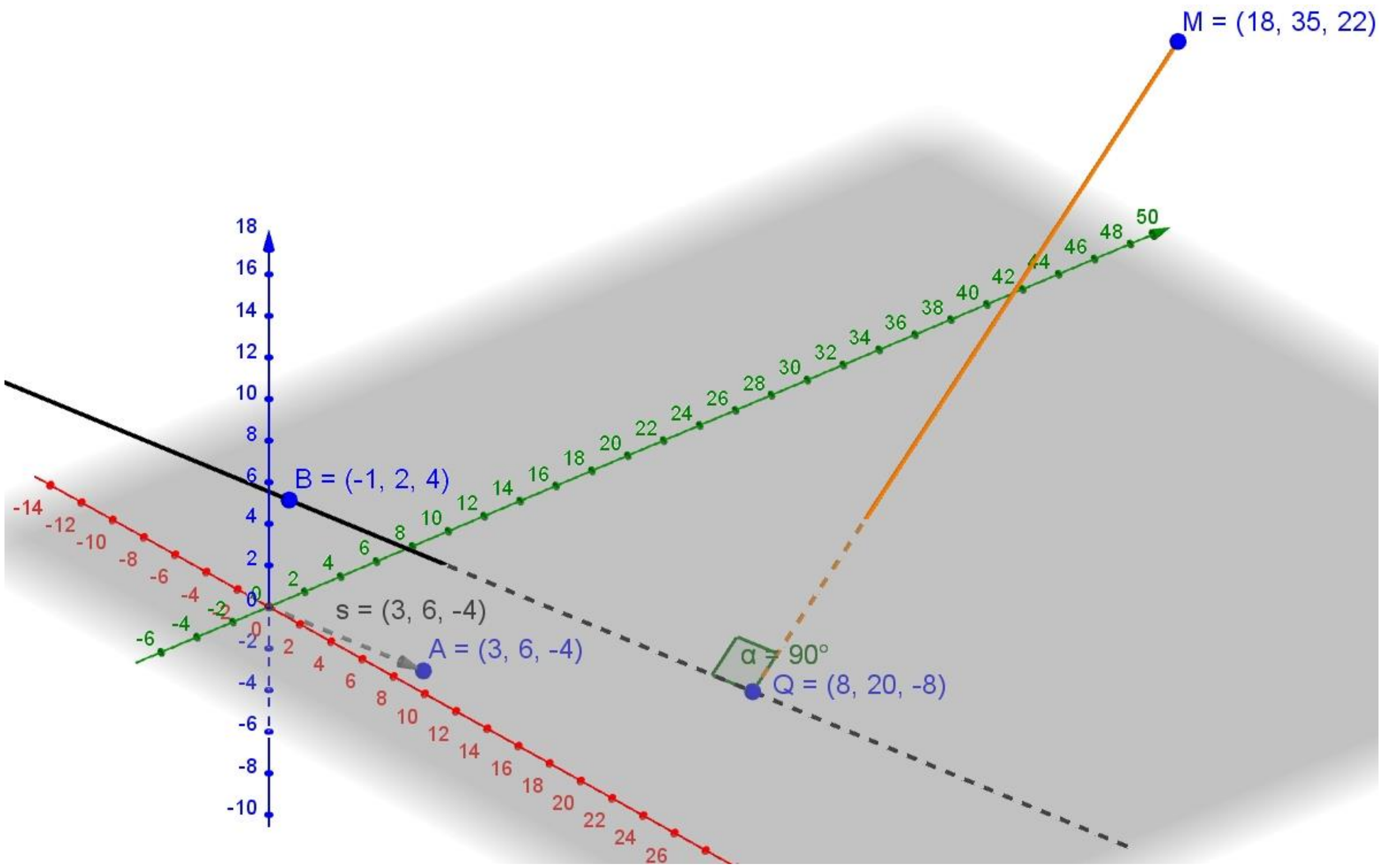
$$\overline{QM} = (19 - 3 \cdot 3)\bar{\imath} + (33 - 6 \cdot 3)\bar{\jmath} + (18 + 4 \cdot 3)\bar{k} = 10\bar{\imath} + 15\bar{\jmath} + 30\bar{k}$$

ja pituus

$$|\overline{QM}| = \sqrt{10^2 + 15^2 + 30^2} = \sqrt{1225} = 35\,.$$

Vastaus: Projektiopiste $Q = (8, 20, -8)$ ja etäisyys suorasta l on 35.

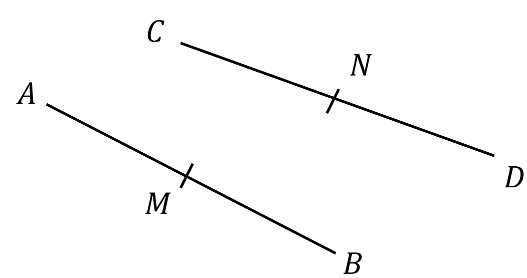
Kuva!



4. **a) Piste $\boldsymbol{M}$ on janan $\boldsymbol{AB}$ keskipiste ja $\boldsymbol{N}$ on janan $\boldsymbol{CD}$ keskipiste. Osoita, että $\overline{\boldsymbol{MN}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{AC}} + \overline{\boldsymbol{BD}}\right)$. Käytä oikeaa todistusmuotoa, eli ensin oletus, sitten väite ja lopuksi todistus.**

   b) Pisteestä $\boldsymbol{A}$ edetään $\boldsymbol{20}$ yksikköä vektorin $\overline{\boldsymbol{u}} = 3\overline{\boldsymbol{\imath}} - \frac{8}{5}\overline{\boldsymbol{\jmath}}$ suuntaan, jolloin tullaan pisteeseen $\boldsymbol{B}$. Pisteestä $\boldsymbol{B}$ edetään neljä yksikköä vektorin $\overline{\boldsymbol{v}} = -\frac{5}{2}\overline{\boldsymbol{\imath}} + 6\overline{\boldsymbol{\jmath}}$ suuntaan, jolloin tullaan pisteeseen $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{15}, \boldsymbol{4})$. Määritä piste $\boldsymbol{A}$.

a) Piirretään ensin kuva (oikealla).



Ol. Pisteet M ja N ovat janojen AB ja CD keskipisteet.

Vä. Pätee $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

Tod. Väite toisin kirjoitettuna:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\,.$$

Koska nyt

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}, & \text{vasen reitti} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}, & \text{oikea reitti} \end{cases}$$

niin sijoittamalla (sekä oletusta käyttäen) saadaan

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \overrightarrow{MN} &= \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}}_{=\overrightarrow{MN}} + \underbrace{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}}_{=\overrightarrow{MN}} \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{ND} \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CN} \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CN} \\
&= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}
\end{aligned}
$$

josta

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right).$$

Eli väite pitää paikkansa.

b) Pisteen $C = (15, 4)$ paikkavektori on

$$\overline{OC} = 15\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}\,.$$

Muodostuu yhtälö

$$\overline{OA} = \overline{OC} - 4\bar{v}^{\mathrm{o}} - 20\bar{u}^{\mathrm{o}},$$

missä yksikkövektorit ovat muotoa

$$\bar{v}^{\mathrm{o}} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{-\frac{5}{2}\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}}{\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2}} = \frac{-\frac{5}{2}\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}}{\sqrt{\frac{25}{4} + \frac{36 \cdot 4}{4}}} = \frac{-\frac{5}{2}\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}}{\frac{13}{2}} = -\frac{5}{13}\bar{\imath} + \frac{12}{13}\bar{\jmath}$$

$$\bar{u}^{\mathrm{o}} = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{3\bar{\imath} - \frac{8}{5}\bar{\jmath}}{\sqrt{3^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2}} = \frac{3\bar{\imath} - \frac{8}{5}\bar{\jmath}}{\sqrt{\frac{9 \cdot 25}{25} + \frac{64}{25}}} = \frac{3\bar{\imath} - \frac{8}{5}\bar{\jmath}}{\frac{17}{5}} = \frac{15}{17}\bar{\imath} - \frac{8}{17}\bar{\jmath}$$

Näin ollen

$$
\begin{aligned}
\overline{OA} &= \overline{OC} - 4\bar{v}^{\mathrm{o}} - 20\bar{u}^{\mathrm{o}} \\
&= (15\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}) - 4\left(-\frac{5}{13}\bar{\imath} + \frac{12}{13}\bar{\jmath}\right) - 20\left(\frac{15}{17}\bar{\imath} - \frac{8}{17}\bar{\jmath}\right) \\
&= -\frac{245}{221}\bar{\imath} + \frac{2\,148}{221}\bar{\jmath} \quad \Longrightarrow \quad A = \left(-\frac{245}{221}, \frac{2\,148}{221}\right) \approx (-1{,}1; 9{,}7)
\end{aligned}
$$

5. a) Määritä $|\bar{a}+2\bar{b}|$, kun $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$ ja $|2\bar{a}+3\bar{b}|=7$.

b) Suora a kulkee pisteen $P=(55,22,37)$ kautta vektorin $\bar{s}=-2\bar{\imath}+\bar{\jmath}-2\bar{k}$ suuntaisesti. Suora b kulkee pisteiden $A=(-5,2,7)$ ja $B=(1,4,10)$ kautta. Määritä suorien leikkauspiste ja suorien välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella. Mikä on suoran a ja xy-tason välinen kulma?

a) Koska pistetuloa hyödyntäen

$$|2\bar{a}+3\bar{b}|^2=(2\bar{a}+3\bar{b})\bullet(2\bar{a}+3\bar{b})=2\bar{a}\bullet 2\bar{a}+2\bar{a}\bullet 3\bar{b}+3\bar{b}\bullet 2\bar{a}+3\bar{b}\bullet 3\bar{b}$$

$$=4\cdot\underbrace{\bar{a}\bullet\bar{a}}_{=|\bar{a}|^2}+6\cdot\bar{a}\bullet\bar{b}+6\cdot\bar{b}\bullet\bar{a}+9\cdot\underbrace{\bar{b}\bullet\bar{b}}_{=|\bar{b}|^2}=4\cdot 2^2+12\cdot\bar{a}\bullet\bar{b}+9\cdot 3^2=7^2$$

niin

$$\bar{a}\bullet\bar{b}=\frac{49-16-81}{12}=\frac{-48}{12}=-4$$

Näin ollen

$$|\bar{a}+2\bar{b}|^2=(\bar{a}+2\bar{b})\bullet(\bar{a}+2\bar{b})=\bar{a}\bullet\bar{a}+\bar{a}\bullet 2\bar{b}+2\bar{b}\bullet\bar{a}+2\bar{b}\bullet 2\bar{b}$$

$$=\underbrace{\bar{a}\bullet\bar{a}}_{=|\bar{a}|^2}+2\cdot\bar{a}\bullet\bar{b}+2\cdot\bar{b}\bullet\bar{a}+4\cdot\underbrace{\bar{b}\bullet\bar{b}}_{=|\bar{b}|^2}$$

$$=2^2+4\cdot\underbrace{\bar{a}\bullet\bar{b}}_{=-4}+4\cdot 3^2=4+4\cdot(-4)+36=24,$$

josta $|\bar{a}+2\bar{b}|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

b) Suora a: $\overline{OP}=(55\bar{\imath}+22\bar{\jmath}+37\bar{k})+t\underbrace{(-2\bar{\imath}+\bar{\jmath}-2\bar{k})}_{=\bar{s}}=(55-2t)\bar{\imath}+(22+t)\bar{\jmath}+(37-2t)\bar{k},\ \in\mathbb{R}$

Suora b: $\overline{OP}=(-5\bar{\imath}+2\bar{\jmath}+7\bar{k})+s\underbrace{(6\bar{\imath}+2\bar{\jmath}+3\bar{k})}_{=\overline{AB}}=(-5+6s)\bar{\imath}+(2+2s)\bar{\jmath}+(7+3s)\bar{k},\ \in\mathbb{R}$

Näiden suorien leikkauspisteessä koordinaatit on oltava samat. Muodostuu yhtälöryhmä:

$$\begin{cases}55-2t=-5+6s\\22+t=2+2s\\37-2t=7+3s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}55-4s-40=-5+6s\\t=2s-20\ \updownarrow\text{ sij.}\\37-4s-40=7+3s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-10s=-100\\-7s=-70\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}s=10\\\text{ja }t=0\end{matrix}$$

Eli leikkauspiste on $(55,22,37)$. Leikkauskulmaksi saadaan

$$\cos(\bar{s},\overline{AB})=\left|\frac{\bar{s}\bullet\overline{AB}}{|\bar{s}||\overline{AB}|}\right|=\left|\frac{-2\cdot 6+1\cdot 2+(-2)\cdot 3}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{6^2+2^2+3^2}}\right|=\frac{|-16|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{49}}=\frac{16}{21}$$

$$\Rightarrow\quad\sphericalangle(\bar{s},\overline{AB})=40{,}367\ldots^\circ\approx 40{,}4^\circ$$

Suoran a ja xy-tason väliseksi kulmaksi saadaan, kun havaitaan, että $\bar{k}$ on eräs xy-tason normaalivektori.

$$\cos(\bar{s},\bar{n}) = \left|\frac{\bar{s}\bullet\bar{n}}{|\bar{s}||\bar{n}|}\right| = \left|\frac{-2\cdot 0+1\cdot 0+(-2)\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}\right| = \frac{|-2|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{1}} = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \sphericalangle(\bar{s},\bar{n}) = 48{,}189\,\ldots° \quad \Longrightarrow \quad \sphericalangle(\text{suora } a, xy - \text{taso}) = 90° - 48{,}189\,\ldots° = 41{,}810\,\ldots° \approx 41{,}8°$$

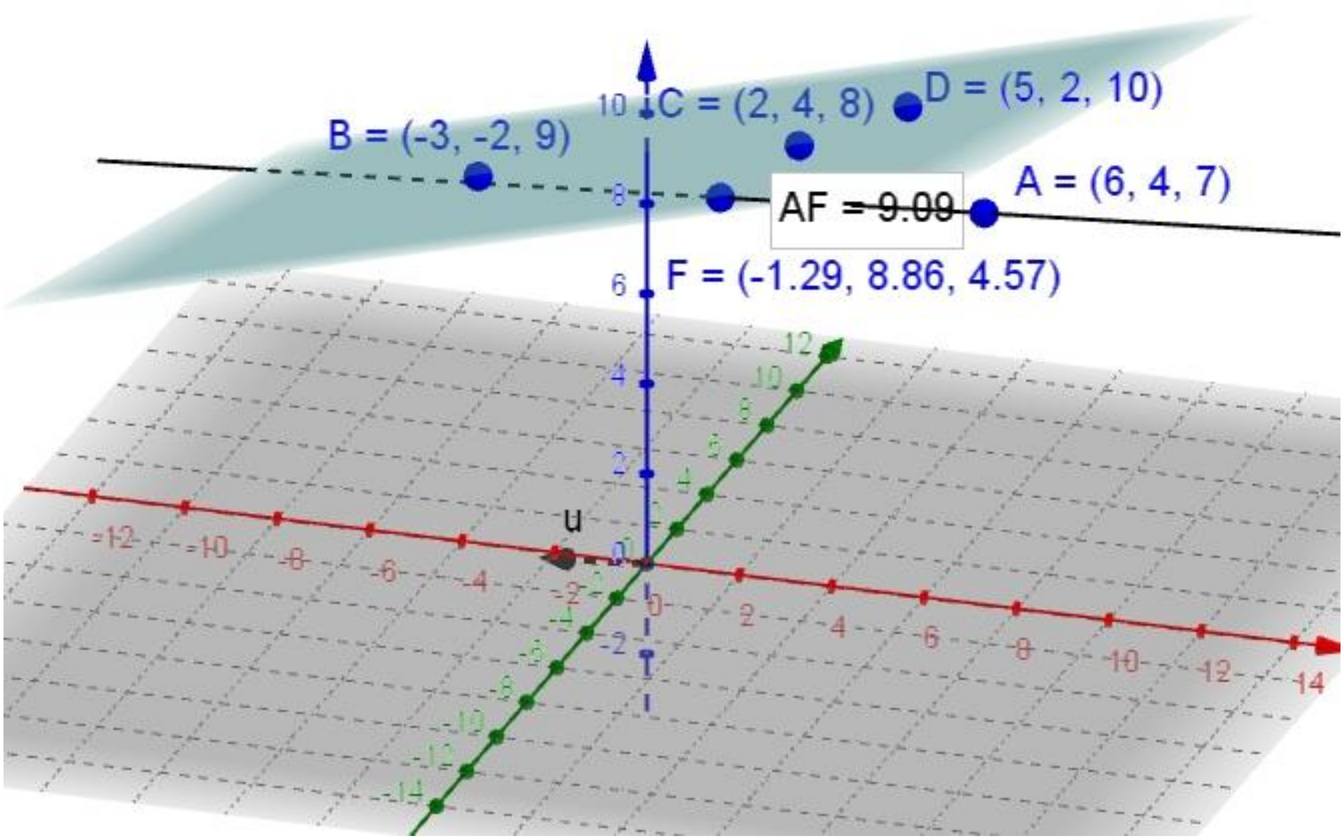
6. Suihkukone on pisteessä $(6,4,7)$ ja se lentää vektorin $-3\bar{\imath}+2\bar{\jmath}-\bar{k}$ suuntaan. Ukkospilven etureuna on pisteiden $(-3,-2,9)$, $(2,4,8)$ ja $(5,2,10)$ määräämän tason suuntainen. Kuinka pitkän matkan kone lentää ennen kuin se osuu ukkospilveen? Koordinaatiston yksikkö vastaa kilometriä.

Ratkaise tehtävä

a) Ohjelmistoja käyttäen (kopioi paperille tarvittavat tiedot ja piirrokset, jos vastaat paperille) (2p) ja

b) Laskennallisesti, eli välivaiheet näkyviin. (4p)

a) 1) Sijoitetaan tunnetut pisteet koordinaatstoon ja muodostetaan lentokoneen lentämä suora sekä ukkosrintaman taso. **2)** Määritetään suoran ja tason leikkaupiste sekä lasketaan etäisyys. katso kuva alla.



b) Suunnitelma: Muodostetaan suoran koordinaattimuotoinen yhtälö sekä tason normaalimuotoinen yhtälö. Sijoitetaan suoran koordinaatit tason yhtälöön, ratkaistaan t ja määritetään leikkauspiste. Lopuksi määritetään pisteiden välinen pituus.

Suoran yhtälö:

Olkoon piste $P = (x, y, z)$ suoran mielivaltainen piste. Tällöin on olemassa $t \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\overrightarrow{OP} = 6\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 7\bar{k} + t\left(-3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - \bar{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 7 - t \end{cases}.$$

Tason yhtälö:

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita

$$\bar{u} = \left(2 - (-3)\right)\bar{\imath} + \left(4 - (-2)\right)\bar{\jmath} + (8 - 9)\bar{k} = 5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - \bar{k},$$

$$\bar{v} = \left(5 - (-3)\right)\bar{\imath} + \left(2 - (-2)\right)\bar{\jmath} + (10 - 9)\bar{k} = 8\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + \bar{k}\,.$$

Olkoon piste $Q = (x, y, z)$ tason mielivaltainen piste. Tällöin on olemassa $r, s \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\overrightarrow{OQ} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 8\bar{k} + r\left(5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - \bar{k}\right) + s\left(8\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + \bar{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + 5r + 8s \\ y = 4 + 6r + 4s \\ z = 8 - r + s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = \frac{1}{5}(x - 2 - 8s) \\ r = \frac{1}{6}(y - 4 - 4s) \\ r = 8 + s - z \quad \uparrow \text{sij.} \end{cases}$$

Kahdesta alimmaisesta yhtälöstä saadaan

$$r = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}(y - 4 - 4s) = 8 + s - z \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow s = \frac{1}{10}(y - 52 + 6z)\,.$$

Vastaavasti kahdesta ylimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$r = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}(y - 4 - 4s) = \frac{1}{5}(x - 2 - 8s) \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow s = \frac{1}{28}(6x + 8 - 5y)\,.$$

Yhdistetään tiedot, saadaan tasolle normaalimuotoinen yhtälö

$$s = s \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10}(y - 52 + 6z) = \frac{1}{28}(6x + 8 - 5y) \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow 60x - 78y - 168z + 1536 = 0\,.$$

Näin on saatu tason normaalimuotoinen yhtälö, sijoitetaan siihen suoran koordinaatit ja ratkaistaan t, siis

$$60(6 - 3t) - 78(4 + 2t) - 168(7 - t) + 1536 = 0$$

$$360 - 180t - 312 - 156t - 1176 + 168t + 1536 = 0$$

$$-168t + 408 = 0$$

$$t = \frac{408}{168} = \frac{17}{7}$$

Suoran ja tason leikkauspiste on

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 - 3 \cdot \dfrac{17}{7} = -\dfrac{9}{7} \\ y = 4 + 2 \cdot \dfrac{17}{7} = \dfrac{62}{7} \\ z = 7 - \dfrac{17}{7} = \dfrac{32}{7} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{9}{7}, \frac{62}{7}, \frac{32}{7}\right)$$

Halutut pisteet ovat siis $(6,4,7)$ ja $\left(-\frac{9}{7}, \frac{62}{7}, \frac{32}{7}\right)$. Näiden välinen etäisyys on

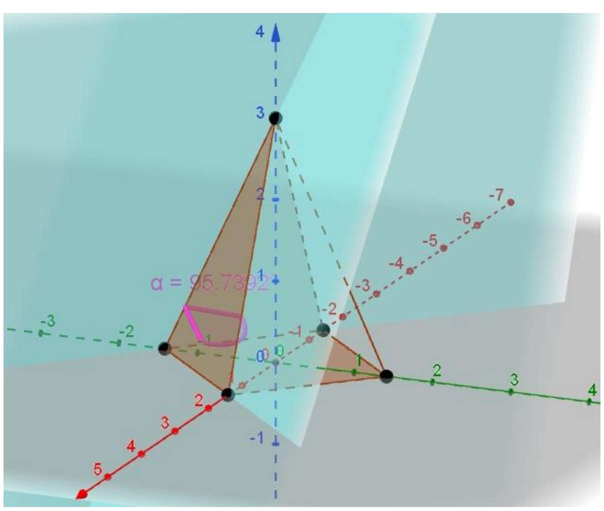
$$\sqrt{\left(6 + \frac{9}{7}\right)^2 + \left(4 - \frac{62}{7}\right)^2 + \left(7 - \frac{32}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{578}{7}} = \frac{17\sqrt{14}}{7} \approx 9{,}08688\,.$$

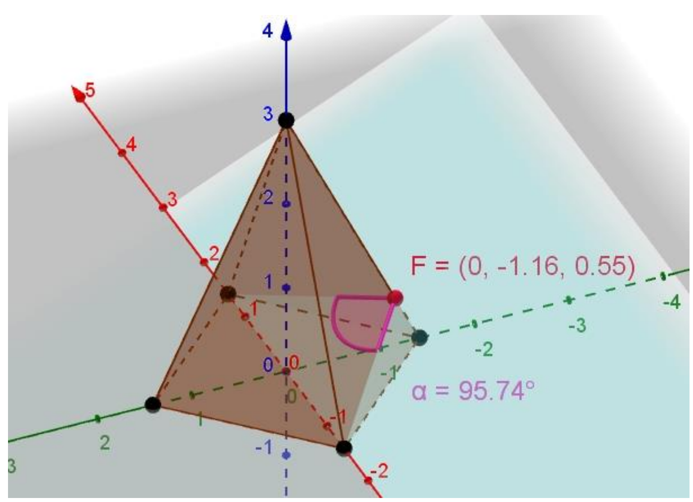
Vastaus: noin 9,1km.

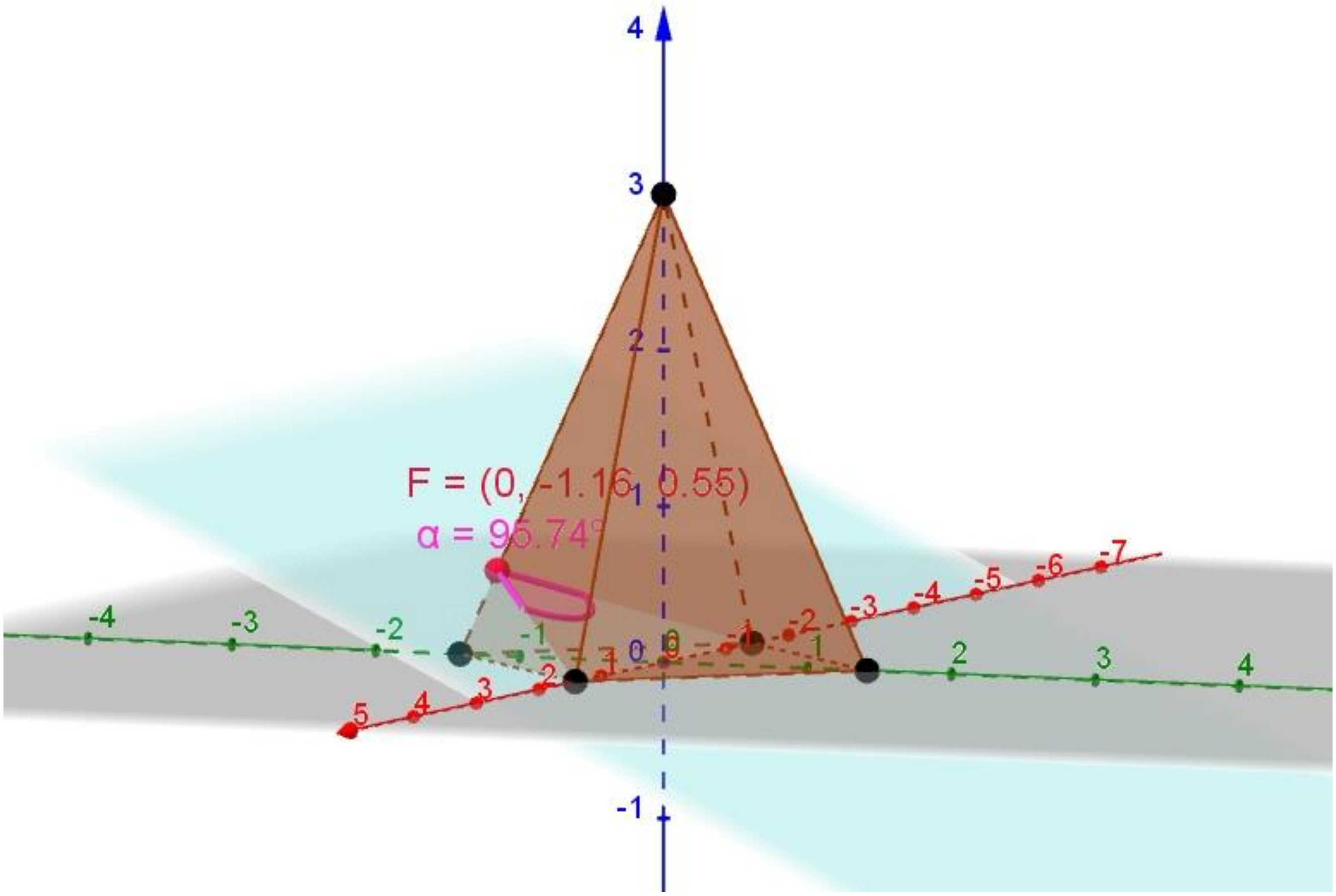
7. Suoran neliöpohjaisen pyramidin korkeus on 3 ja pohjaneliön pituus on 2, katso materiaalit-osiosta geogebratiedosto *tehtävä 7*. Laske analyyttisesti (välivaiheet näkyviin) asteen kymmenesosan tarkkuudella pyramidin kahden vierekkäisen sivutahkon välisen kulman suuruus.

OHJE: Merkitse ensin geogebralla kysytty kulma näkyviin (riittävän isokokoisena) ja kirjoita ajatuksesi kuinka lähdet tehtävää ratkaisemaan. (1p) Ratkaise sitten tehtävä. (5p)

Geogebralla piirretty tilanne:







Ratkaisuajatus on seuraava. Muodostetaan tahkojen tiedoista (pisteet) tahkoja vastaavien tasojen yhtälöt, jotka muutettuna normaalimuotoon antavat tasojen normaalivektorit. Lasketaan tahkoja vastaavien tasojen välinen kulma normaalivektoreiden avulla. Koska tämä kulma ei kuitenkaan ole (katso geogebratiedosto) tahkojen välinen kulma, vaan sen suplementtikulma, niin lopuksi vähennetään $180°$. Siis

$$\text{tahkojen välinen kulma} = 180° - \text{tahkoja vastaavien tasojen välinen kulma}.$$

Tahko 1, eli tason 1 yhtälö:

$$\overrightarrow{OP} = 3\bar{k} + t(\sqrt{2}\bar{\imath} - 3\bar{k}) + s(\sqrt{2}\bar{\jmath} - 3\bar{k}), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 + \sqrt{2}t \\ y = 0 \qquad + \sqrt{2}s \\ z = 3 - 3t - 3s \end{cases} \Rightarrow z = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}}x - \frac{3}{\sqrt{2}}y \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\sqrt{2}}y + z - 3 = 0$$

Tason 1 normaalivektoriksi saadaan näin ollen

$$\bar{n}_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{\imath} + \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{\jmath} + \bar{k}\,.$$

Tahko 2, eli tason 2 yhtälö:

$$\overrightarrow{OP} = 3\bar{k} + t(\sqrt{2}\bar{\jmath} - 3\bar{k}) + s(-\sqrt{2}\bar{\imath} - 3\bar{k}), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \qquad -\sqrt{2}s \\ y = 0 + \sqrt{2}t \\ z = 3 - 3t - 3s \end{cases} \Rightarrow z = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}}y + \frac{3}{\sqrt{2}}x \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\sqrt{2}}y + z - 3 = 0$$

Tason 2 normaalivektoriksi saadaan näin ollen

$$\bar{n}_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}\bar{\imath} + \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{\jmath} + \bar{k}\,.$$

Tasojen väliseksi kulmaksi saadaan

$$\cos(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \left|\frac{\bar{n}_1 \bullet \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}\right| = \left|\frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2}}\right| = \frac{|1|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad \sphericalangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 84{,}260\ldots^\circ \approx 84{,}3^\circ$$

Lopuksi kysytty kulma

$$180^\circ - 84{,}260\ldots^\circ = 95{,}739\ldots^\circ \approx 95{,}7^\circ\,.$$

TAI (kun pyramidin pohjaneliön kärjet ovat $(\pm 1, \pm 1, 0)$.)

Tahko 1, eli tason 1 yhtälö:

$$\overrightarrow{OP} = 3\bar{k} + t(\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 3\bar{k}) + s(\bar{\imath} - \bar{\jmath} - 3\bar{k}), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 + t + s \\ y = 0 + t - s \\ z = 3 - 3t - 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 1/2(x + y) \searrow \text{sij.} \\ s = 1/2(x - y) \searrow \text{sij.} \\ z = 3 - 3/2(x + y) - 3/2(x - y) \end{array} \Rightarrow z = 3 - 3x$$

Josta edelleen $3x + z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 = 3\bar{\imath} + \bar{k}$.

Tahko 2, eli tason 2 yhtälö:

$$\overrightarrow{OP} = 3\bar{k} + t(\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 3\bar{k}) + s(-\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 3\bar{k}), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 + t - s \\ y = 0 + t + s \\ z = 3 - 3t - 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 1/2(x + y) \searrow \text{sij.} \\ s = 1/2(y - x) \searrow \text{sij.} \\ z = 3 - 3/2(x + y) - 3/2(y - x) \end{array} \Rightarrow z = 3 - 3y$$

Josta edelleen $3y + z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_2 = 3\bar{\jmath} + \bar{k}$. Lopuksi

$$\cos(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \left|\frac{\bar{n}_1 \bullet \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}\right| = \left|\frac{3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$