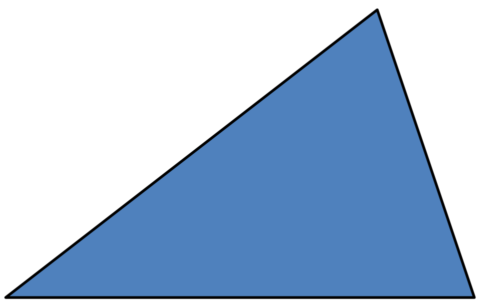
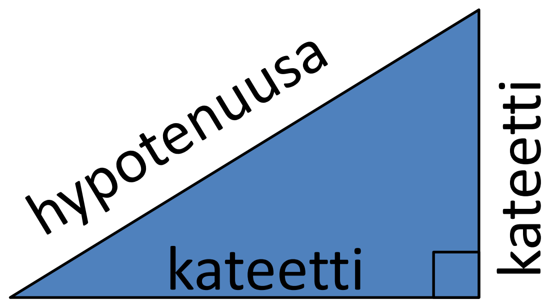
Kolmio ja trigonometriaa

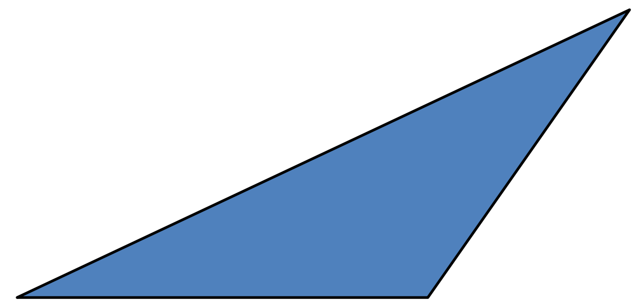
Kolmiot luokiteltiin suurimman kulman perusteella seuraavasti:



teräväkulmainen
kaikki kulmat $< 90°$

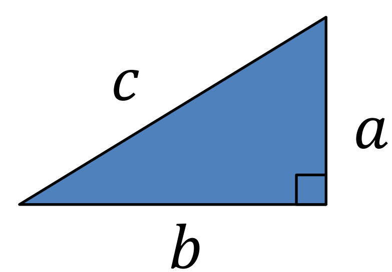


suorakulmainen
yksi kulma $= 90°$



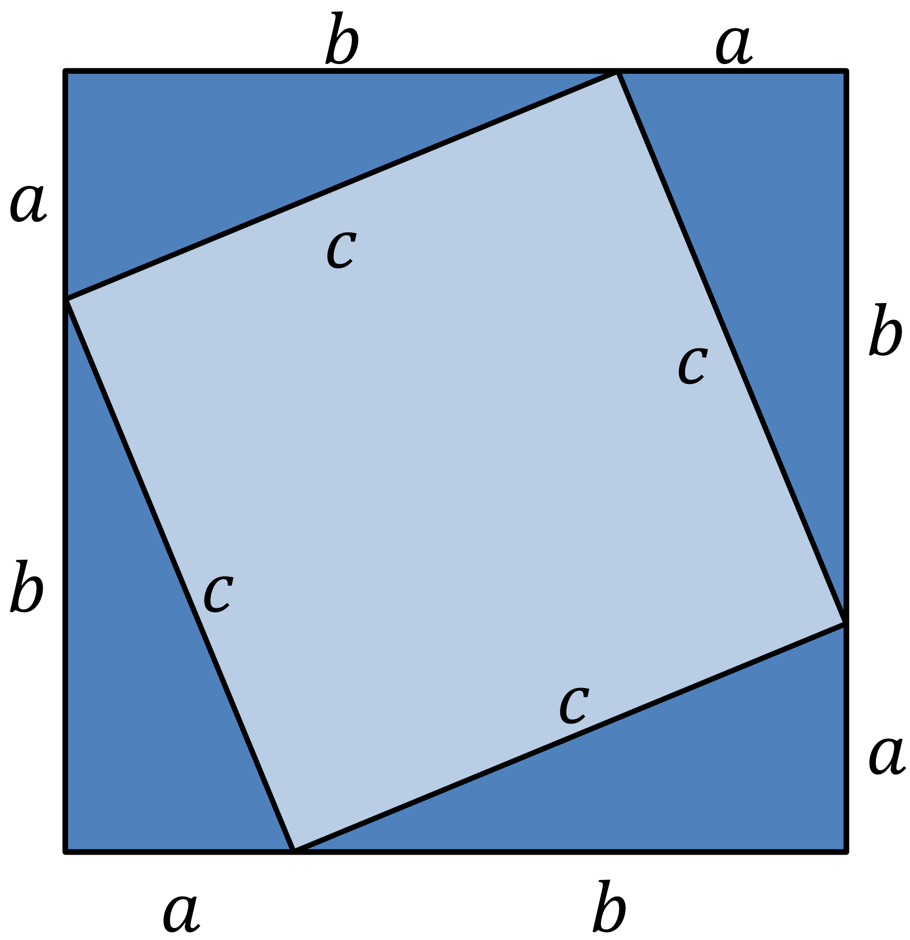
tylppäkulmainen
yksi kulma $> 90°$

Suorakulmainen kolmio Suoran kulman viereisiä sivuja sanotaan *kateeteiksi* ja suoraa kulmaa vastapäätä olevaa sivua *hypotenuusaksi*. Jos suorakulmaisen kolmion kaksi sivua tunnetaan voidaan kolmas sivu laskea *Pythagoraan lauseen* avulla.



Lause, Pythagoras:
Suorakulmaisessa kolmiossa kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö, eli $a^2 + b^2 = c^2$.

Todistus Piirretään kuva ja lasketaan pinta-aloja:



Muodostuu siis neljä suorakulmaista kolmiota.

Pinta-alat:

$$A_{\text{kolmiot}} = 4 \cdot ab \cdot \frac{1}{2} = 2ab$$

$$A_{\text{iso neliö}} = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$A_{\text{pikku neliö}} = c^2$$

Näin ollen, $A_{\text{pikku neliö}} = A_{\text{iso neliö}} - A_{\text{kolmiot}}$

$\rightarrow$ $c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$ OK.

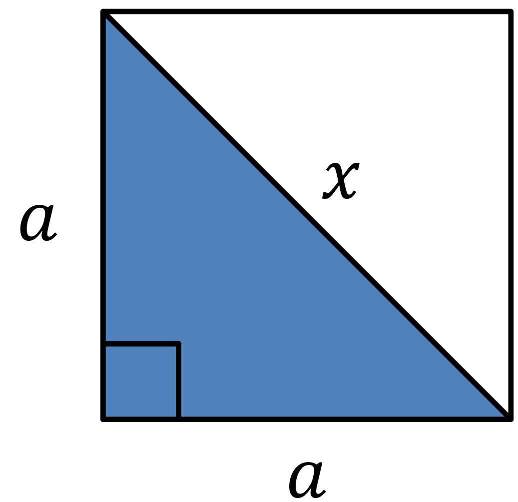
Todistuksia on paljon erilaisia, huomattavaa on, että lause on voimassa myös kääntäen, eli
Jos kolmiossa kahden sivun neliöiden summa on kolmannen sivun neliö, niin kolmio on suorakulmainen.

Esimerkki:

1) Neliön, jonka sivun pituus on a, lävistäjä x toteuttaa Pythagoraan lauseen mukaan yhtälön

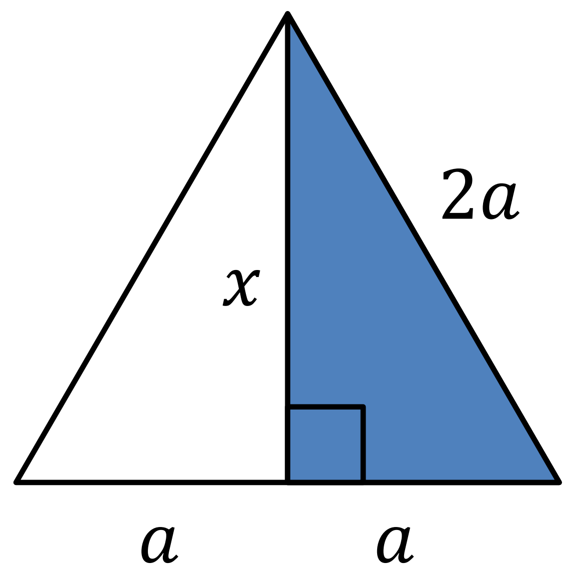
$$x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

(Negatiivista vaihtoehtoa $-a\sqrt{2}$ ei hyväksytä.)



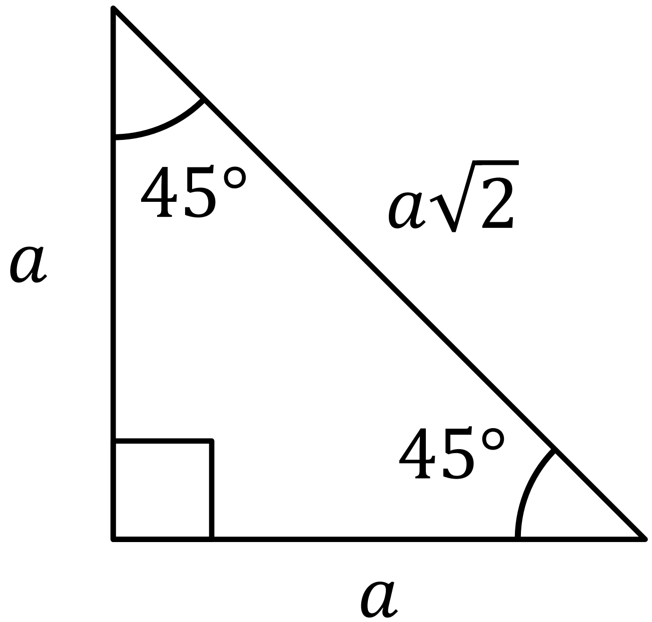
2) Tasasivuisen kolmion, jonka sivun pituus on $2a$, korkeus x toteuttaa Pythagoraan lauseen mukaan yhtälön

$$x^2 + a^2 = (2a)^2 = 4a^2 \Longrightarrow x = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

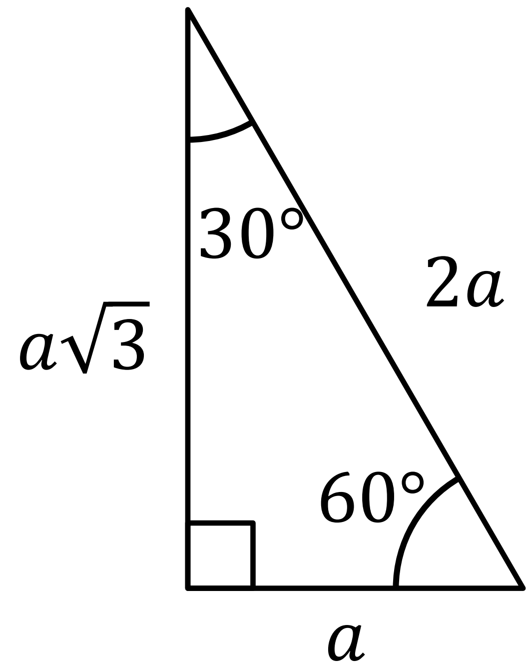


Esimerkkien kolmioista saadaan tärkeät suhteet!

Muistikolmioiden sivujen suhteet (opettele, tarvitaan kurssilla 9):



$a : a : (a\sqrt{2}) = 1 : 1 : \sqrt{2}$



$a : (a\sqrt{3}) : (2a) = 1 : \sqrt{3} : 2$

Jos suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on α, niin toinen on $90° - \alpha$. Osoittautuu, että sivujen suhteet riippuvat vain kolmion muodosta, eli kulmasta α, eikä kolmion koosta.

Näin ollen voidaan määritellä kulman α trigonometriset funktiot: