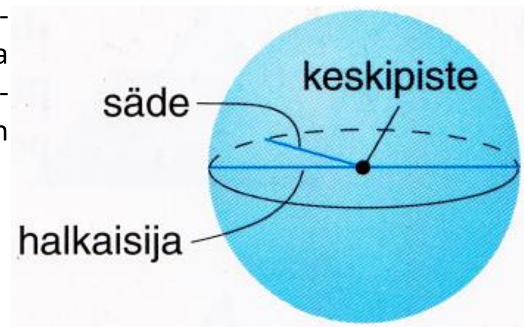
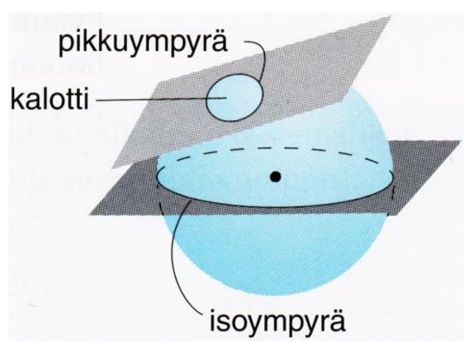
Pallo eli pallopinta ja kuula

Määritelmä, pallo:
Pallopinnan eli *pallon* muodostavat kaikki ne avaruuden pisteet, jotka ovat yhtä etäällä kiinteästä pisteestä eli pallon *keskipisteestä*.
Palloksi kutsutaan myös pallopinnan rajaamaa avaruuden osaa. Toinen nimitys tälle osalle on *kuula*.

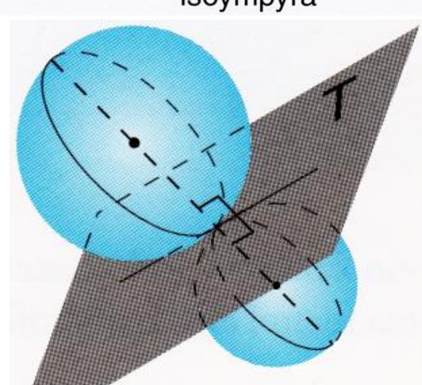
Säde yhdistää pallopinnan pisteen pallon keskipisteeseen ja *halkaisija* on keskipisteen kautta kulkeva pallopinnan kahden pisteen yhdysjana.



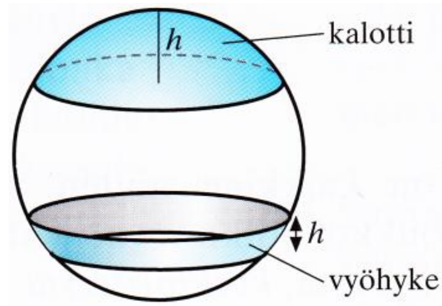
Pallopinnan ja tason leikkauskuvio on ympyrä tai piste.
Ympyrä, joka syntyy pallon keskipisteen kautta kulkevan tason ja pallopinnan leikkauksena, on pallopinnan *isoympyrä*.
Esim. päiväntasaaaja ja kaikki pituuspiirit ovat isoympyröitä (oletetaan ettei maapallo ole litistynyt).
Muut tason ja pallopinnan leikkausympyrät ovat *pikkuympyröitä*, esim. muut leveyspiirit kuin päiv.t.



Kun tasolla ja pallolla on yksi yhteinen piste, tasoa sanotaan *pallon tangenttitasoksi*. Kahdella toisiaan sivuavalla pallolla on yksi yhteinen piste ja yksi yhteinen tangenttitaso.



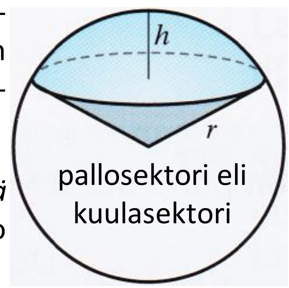
Kahden palloa leikkaavan *yhdensuuntaisen* tason väliin jäävää osaa pallon pinnasta sanotaan *vyöhykkeeksi*.
Yksi palloa leikkaava taso jakaa pallopinnan kahteen *kalottiin*. Kalottia voidaan pitää vyöhykkeen erikoistapauksena.

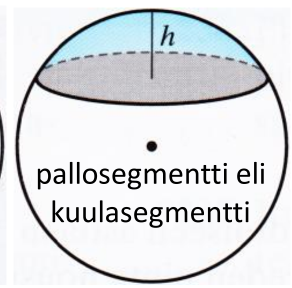


→ Onko puolipallo kalotti vai vyöhyke? Muistatko; Onko puoliympyrä, eli puolikiekko, segmentti vai sektori?

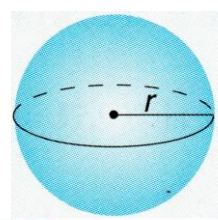
Pallo- eli *kuulasektoria* rajaa kalotti sekä sellaisen ympyräkartion vaippa, jonka kärki on origossa.

Pallo-, eli *kuulasegmenttiä* rajaavat kalotti ja kiekko (kirjassa ympyrä).





Pallon/kuulan pinta-ala ja tilavuus



Lause, pallon pinta-ala ja kuulan tilavuus:
Pallon eli pallopinnan pinta-ala ja kuulan tilavuus ovat

$$A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2, \qquad V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \,.$$

eli V_{kuula}

Lisäksi

$$A_{\text{vyöhyke}} = 2\pi r h, \qquad A_{\text{kalotti}} = 2\pi r h$$

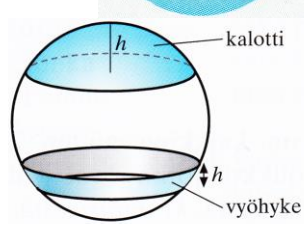
ja

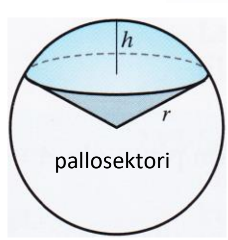
$$V_{\text{pallosektori}} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

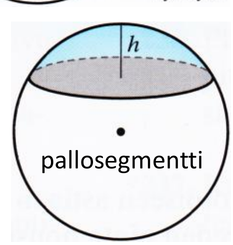
eli $V_{\text{kuulasektori}}$

$$V_{\text{pallosegmentti}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

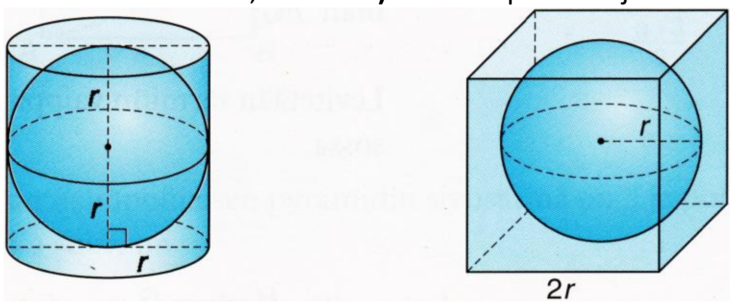
eli $V_{\text{kuulasegmentti}}$







Esimerkki Pallon ympärille asetetaan mahdollisimman pieni suora ympyrälieriö ja kuutio. Määritä kappaleiden
a) tilavuuksien suhde, **b)** kokonaispinta-alojen suhde.



a) Pallon, ympyrälieriön ja kuution tilavuudet:

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad V_{\text{ymp.lieriö}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3, \qquad V_{\text{kuutio}} = 8r^3.$$

Tilavuuksien suhde on näin ollen

$$V_{\text{p}} : V_{\text{y.l}} : V_{\text{k}} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) : (2\pi r^3) : (8r^3) = \frac{2}{3}\pi : \pi : 4 \ \ \textbf{TAI} \ \ (2\pi) : (3\pi) : 12$$

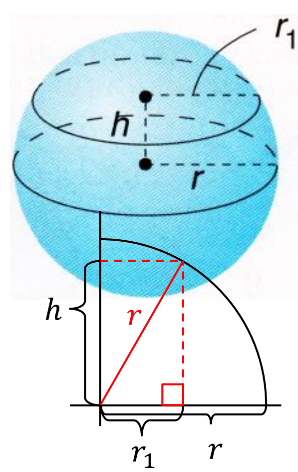
b) Vastaavasti pallon, ympyrälieriön ja kuution pinta-alat:

$$A_{\text{p}} = 4\pi r^2, \qquad A_{\text{y.l.}} = \overbrace{2 \cdot \pi r^2}^{\text{pohjat}} \cdot \overbrace{2\pi r \cdot 2r}^{\text{vaippa}} = 6\pi r^2, \qquad A_{\text{k}} = \overbrace{24r^2}^{6\cdot(2r)^2}.$$

Pinta-alojen suhde on näin ollen

$$A_{\text{p}} : A_{\text{y.l}} : A_{\text{k}} = (4\pi r^2) : (6\pi r^2) : (24r^2) = (2\pi) : (3\pi) : 12.$$

Eli täsmälleen sama kuin tilavuuksien suhteet!



Esimerkki Millä h:n arvolla $r_1 = \frac{r}{2}$?
Tilanne palautuu Pythagoraan lauseeseen, kun havaitaan, että säde r on myös hypotenuusa muodostuvassa kolmiossa.
Saadaan

$$h = \pm\sqrt{r^2 - {r_1}^2} \overset{\substack{\text{vain pos.}\\ \text{hyväk.}}}{\triangleq} \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$