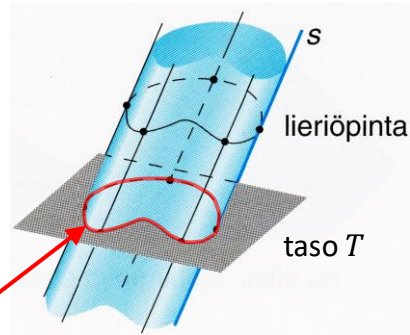


Lieriö ja särmiö

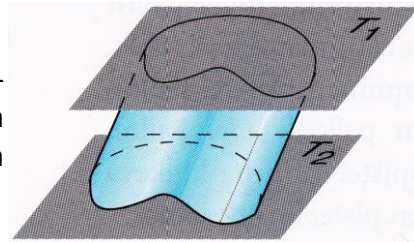
Tarkastellaan pintaa, joka syntyy, kun tasoa T leikkaava suora s liikkuu suuntansa säilyttäen pitkin tason T suljettua käyrää (käyrä ei leikkaa itseään). Tällöin suora s "piirtää" avaruuteen pinnan, jota sanotaan *lieriöpinnaksi*.

suljettu käyrä

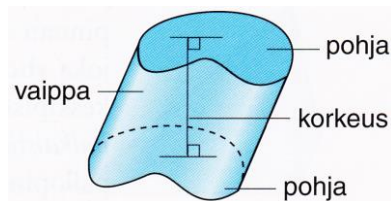


Määritelmä, lieriö:

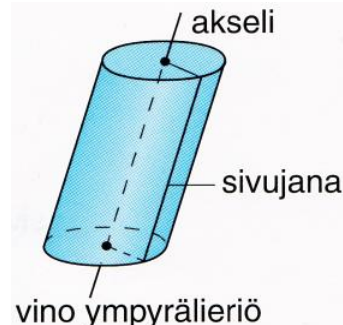
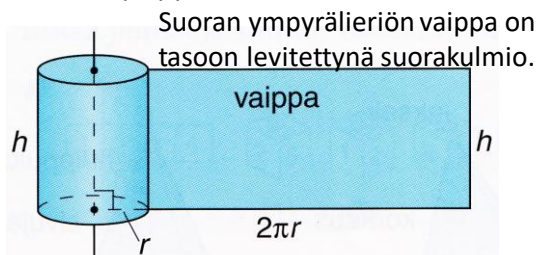
Kun lieriöpinta leikataan yhdensuuntaisilla tasoilla T_1 ja T_2 , niin tasot ja lieriöpinta rajoittavat kappaleen, jota sanotaan lieriöksi.



Lieriöpinnan tasoista T_1 ja T_2 erottamat osat ovat *lieriön pohjat*, pohjien väliin jäävää aluetta sanotaan *vaipaksi*. Lieriön *korkeus* on pohjien välinen etäisyys.

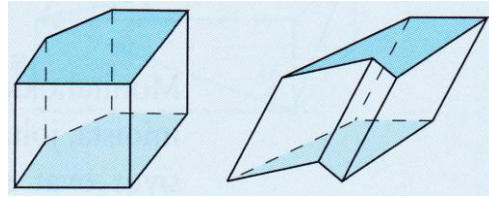


Huomaa, että kaikki särmiöt ovat monikulmiopohjaisia lieriöitä (joita sanotaan myös *prismoiksi*). Lieriö, jonka pohjat ovat ympyröitä, on *ympyrälieriö*. Ympyrälieriön *sivujana* on jana, joka yhdistää pohjaympyröiden kehiltä samaan tasoon kuuluvien säteiden päätepisteet → kuva. Pohjaympyröiden keskipisteiden määräämä suora on ympyrälieriön *akseli*. Jos akseli on kohtisuorassa pohjia vastaan, ympyrälieriö on *suora*, muulloin ympyrälieriö on *vino*.

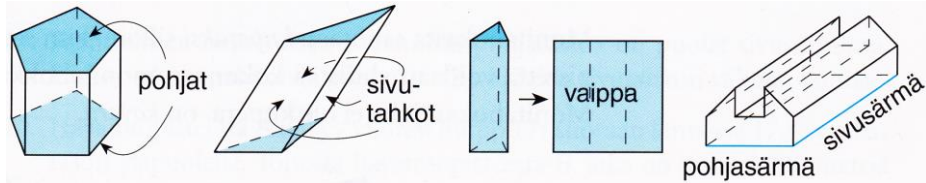


Määritelmä, särmiö:

Särmiö on monitahokas, jota rajoittaa kaksi yhdensuuntaisissa tasoissa olevaa, yhtenevää monikulmiota ja jonka muut tahkot ovat suunnikkaita.



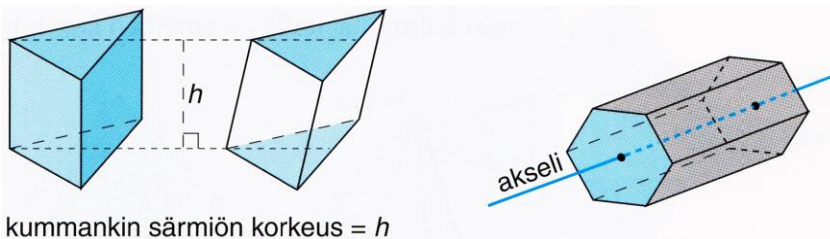
Kuten lieriöissä, särmiöissä on pohjat ja vaipan muodostavat *sivutahkot*. *Pohja-* ja *sivusärmät* ovat vastaavien tahkojen särmiä.



Sivutahkojen lukumäärän mukaan särmiötä kutsutaan kolmi-, neli-, viisisivuisiksi jne. Särmiön pohjat ovat tällöin yhteneviä kolmioita, nelikulmioita,.... Jos nelisivuisen särmiön pohjat ovat suunnikkaita, särmiötä sanotaan *suuntaissärmiöksi*.



Kuten lieriöissä, särmiö *korkeus* on pohjien välinen etäisyys. Ja jos särmiön pohjat ovat säännöllisiä monitahokkaita, löytyy akseli → kuva.

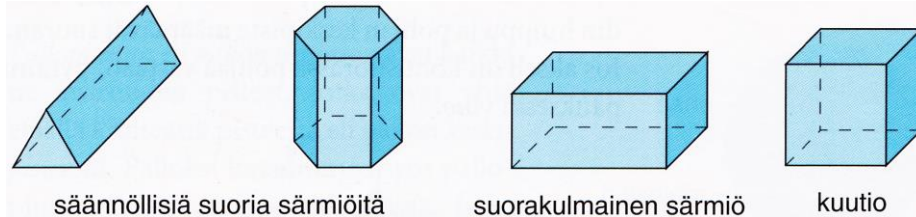


kummankin särmiön korkeus = h

Suoran särmiön sivutahkot ovat kohtisuorassa pohjia vastaan. Sivutahkot ovat tällöin suorakulmioita ja korkeus on sivusärmän pituus.

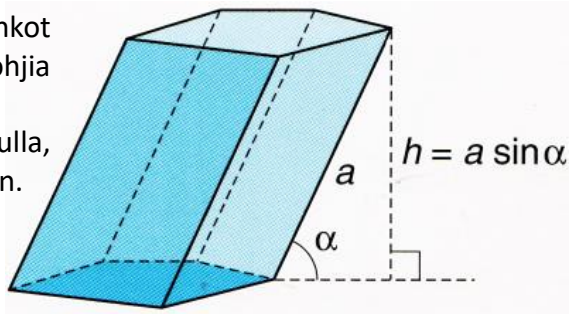


Suora särmiö on *säännöllinen*, jos sen pohjat ovat säännöllisiä monikulmioita. Ja jos pohjat ovat suorakulmiot \rightarrow suorakulmainen särmiö. *Kuutio* on suorakulmainen särmiö, jonka kaikki tahkot ovat neliöitä.



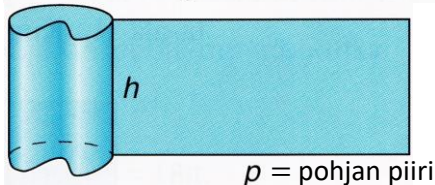
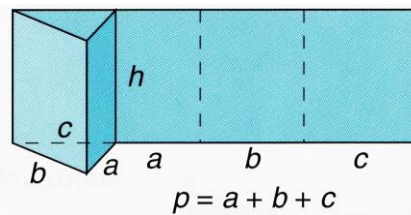
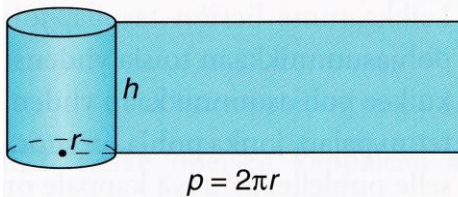
Särmiö, jonka kaikki sivutahkot eivät ole kohtisuorassa pohjia vastaan on *vino särmiö*.

Korkeus saadaan sinin avulla, jos kallistuskulma tunnetaan.



Lieriön ja särmiön pinta-alat ja tilavuudet

Suoran lieriön vaippa on tasoon levitettynä suorakulmion muotoinen. Ei siis ole väliä onko ympyrälieriö vai särmiö, kunhan se on suora.



Lause, vaipan pinta-ala:

$A_v = A_{\text{vaippa}} = ph$,
missä p = pohjan piiri ja
 h = lieriön korkeus.

Lause, lieriön kokonaispinta-ala:

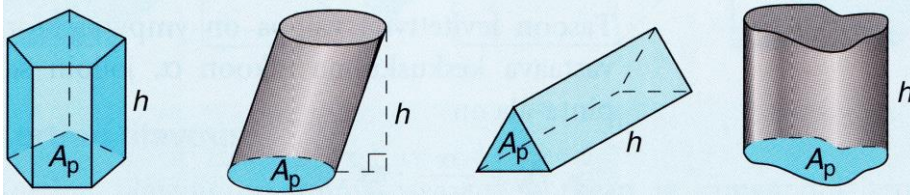
$$A = A_v + 2A_p,$$

missä A_v = vaipan pinta-ala ja A_p = pohjan pinta-ala.

Lause, lieriön tilavuus:

$$V = A_p h,$$

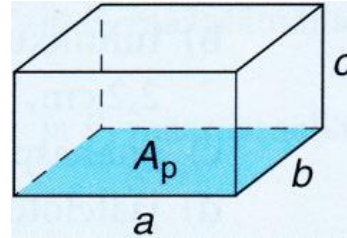
missä A_p = lieriön pohjan pinta-ala ja h on lieriön korkeus.

**Lause, suorakulmaisen särmiön tilavuus:**

$$V = abc = A_p c,$$

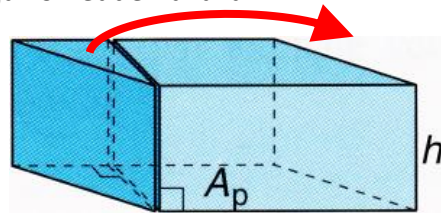
missä A_p = särmiön pohjan pinta-ala ja c on särmiön korkeus.

Huomaa, että voit valita minkä tahansa särmiön pituuden korkeudeksi.



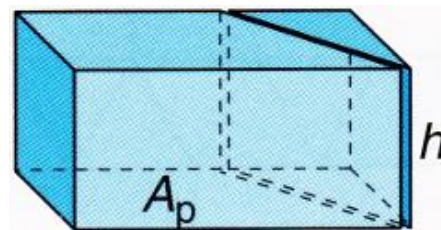
Esimerkki 1 Suoran lieriön pohja on **a)** suunnikas **b)** ympyrä. Määritä lieriön tilavuus pohjan pinta-alan ja korkeuden avulla.

a) Leikataan lieriö (särmiö) tasolla, joka on kohtisuorassa pohjaa ja toisaalta pohjasuunnikkaan toisia yhdensuuntaisia sivuja vastaan sekä kulkee pohjasuunnikkaan yhden kärjen kautta → kuva.



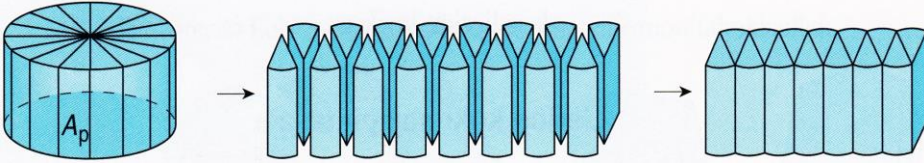
Siirretään näin saatu pala lieriön (särmiön) toiselle puolelle.

Syntyvä kappale on muodoltaan suorakulmainen särmiö, jonka pohjan pinta-ala on sama kuin lieriön pohjan pinta-ala A_p . Korkeus ei muutu, joten kummankin kappaleen tilavuus on $V = A_p h$.



Idea on sama kuin suunnikkaan pinta-alan kaavan osoittaminen.

b) Jaetaan ympyrälieriö pohjaa vastaan kohtisuorilla tasoilla yhtä suuriin lieriöihin, joiden pohjat ovat ympyräsektoreita. Siirretään ympyräsektorit vierekkäin lomittain kuvan osoittamalla tavalla.



Mitä pienempiin sektoreihin pohjaympyrä jaetaan, sitä tarkemmin palasista muodostuva kappale on suunnikas pohjainen särmiö, jonka tilavuus on $V = A_p h$. Siis ympyrälieriön tilavuus on myös $V = A_p h$.

Idea on sama kuin ympyrän pinta-alan kaavan osoittaminen.

Esimerkki 2 Laske oheisen kappaleen

a) kokonaispinta-ala ja **b)** tilavuus

a) Lieriön pohja on puoliympyrä, jonka pinta-ala on

$$A_p = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6^2 = 18\pi.$$

Lieriön korkeus $h = 4$ ja pohjan piiri

$$p = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6}_{\text{kaareva osa}} + \underbrace{2 \cdot 6}_{\text{"halkaisija"}} = 6\pi + 12.$$

Näin ollen vaipan pinta-ala on

$$A_v = ph = (6\pi + 12) \cdot 4 = 24\pi + 48$$

ja kokonaispinta-ala

$$A = 2 \cdot A_p + A_v = 2 \cdot 18\pi + 24\pi + 48 = 60\pi + 48.$$

b) Lieriön tilavuus on

$$V = A_p h = 18\pi \cdot 4 = 72\pi.$$

