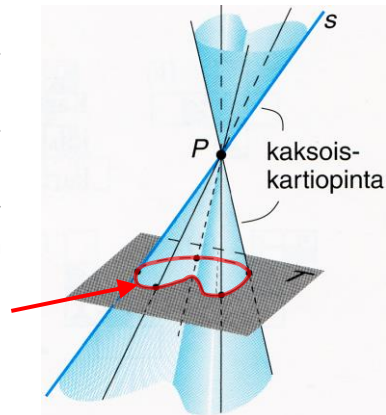


## Kartio ja pyramidi

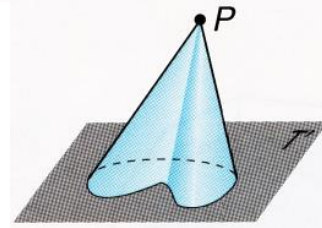
Kun avaruuden suora  $s$  liikkuu pitkin itseään leikkaamatonta tason  $T$  suljettua käyrää ja lisäksi kulkee tason  $T$  ulkopuolisen pisteen  $P$  kautta, suora  $s$  "piirtää" avaruuteen pinnan, jota sanotaan *kaksoiskartiopinnaksi*. Piste  $P$  jakaa tämän pinnan kahdeksi *kartiopinnaksi*.

suljettu käyrä



### Määritelmä, kartio:

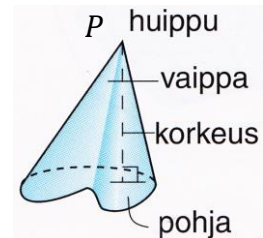
Kun kartiopinta leikataan tasolla  $T'$ , joka ei kulje pisteen  $P$  kautta, kartiopinta ja taso rajaavat kappaleen, jota sanotaan *kartioksi*.



Piste  $P$  on kartion *huippu* ja kartiopinnan tasosta  $T$  erottama osa on kartion *pohja*.

Huipun etäisyys pohjasta on kartion *korkeus*. *Vaipaksi* sanotaan huipun ja pohjan väliin jäävää kartiopinnan osaa.

Huomaa, että kaikki pyramidit ovat kartioita!



Kartio, jonka pohja on ympyrä, sanotaan *ympyräkartioksi*. Ympyräkartiion *sivujana* on huipun ja pohjaympyrän kehän pisteen yhdysjana.

Huipun ja pohjaympyrän keskipisteen määräämää suoraa sanotaan ympyräkartiion *akseliksi*. Jos akseli on kohtisuorassa pohjaa vastaan, on ympyräkartiio *suora*.

Muulloin ympyräkartiio on *vino*.



vino ympyräkartiio

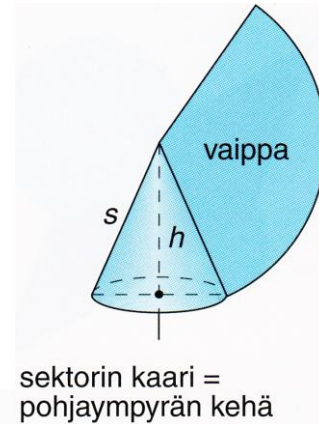


suora ympyräkartiio

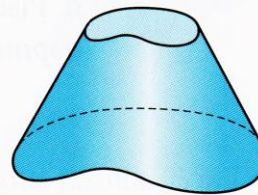
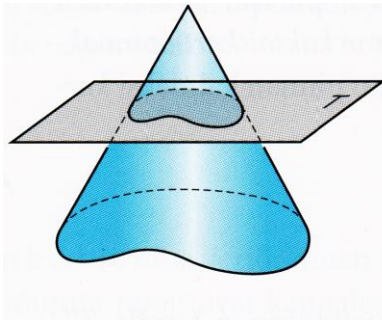
Suoran ympyräkartion *vaippa* on tasoon levi-  
tettynä ympyräsektori, jonka säteenä on kar-  
tion sivujana ja kaarena pohjaympyrän kehä.

Kartiota leikkaava pohjan suuntainen taso  $T$   
jakaa kartion kahteen osaan, joista huipun  
puoleinen on alkuperäisen kartion kanssa  
yhdensuuntainen kartio.

Pohjan puoleista osaa sanotaan *katkaistuksi*  
*kartioksi*.



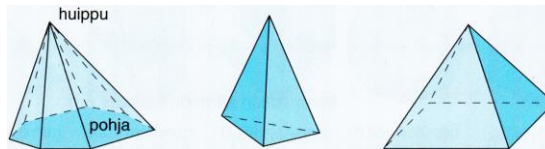
sektorin kaari =  
pohjaympyrän kehä



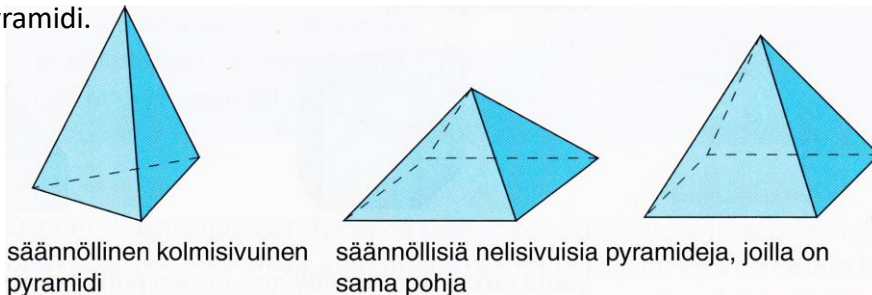
katkaistu kartio

### Määritelmä, pyramidi:

Pyramidi on monitahokas,  
jonka pohja on monikulmio  
ja sivutahkot ovat kolmioita,  
joilla on yhteinen kär-  
kipiste (pyramidin huippu).

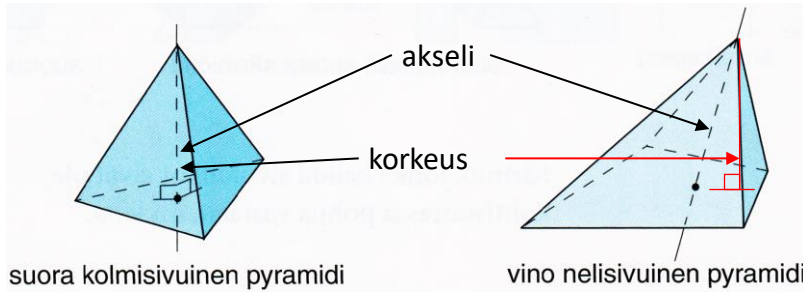


Pyramideja sanotaan sivutahkojen lukumäärän mukaan kolmi-, nelisi-  
vuisiksi jne. *Säännöllisen pyramidin* pohja on säännöllinen monikulmio  
ja sivutahkot tasakylkisiä kolmioita. *Korkeus* on huipun etäisyys poh-  
jasta. Akseli kulkee huipun ja pohjan keskipisteen kautta → suora/vino  
pyramidi.

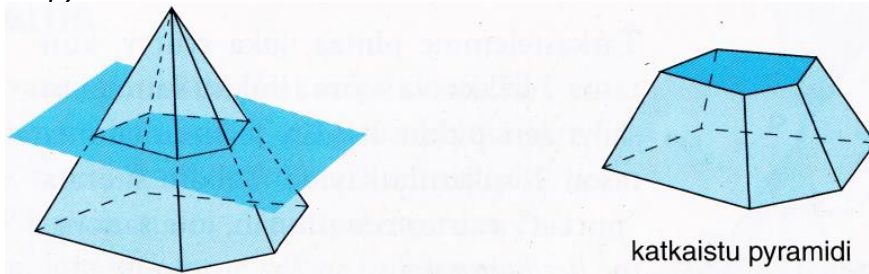


säännöllinen kolmisivuinen  
pyramidi

säännöllisiä nelisivuisia pyramideja, joilla on  
sama pohja



Pyramidia leikkaava pohjan suuntainen taso jakaa pyramidin kahteen osaan, joista huipun puoleinen osa on alkuperäisen pyramidin kanssa yhdenmuotoinen pyramidi ja pohjan puoleista osaa sanotaan *katkaistuksi pyramidiksi*.



## Kartion ja pyramidin pinta-alat ja tilavuudet

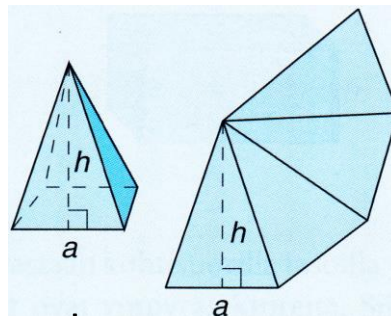
Kartion vaipan muoto riippuu pohjan muodosta: suoralla ympyräkartiolla se oli ympyräsektori, kun taas pyramidilla vaippa koostuu kolmioidista. Suoran ympyräkartion alan lauseke on johdettu kirjassa, s.155.

### Lause, pyramidin vaipan pinta-ala:

Pyramidin vaipan pinta-ala on osakolmioiden pinta-alojen summa.

Esimerkiksi suoran säännöllisen nelisivuisen pyramidin vaipan pinta-ala

$$A_v = 4 \cdot \frac{1}{2} ah = 2ah.$$

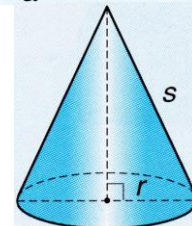


### Lause, suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala:

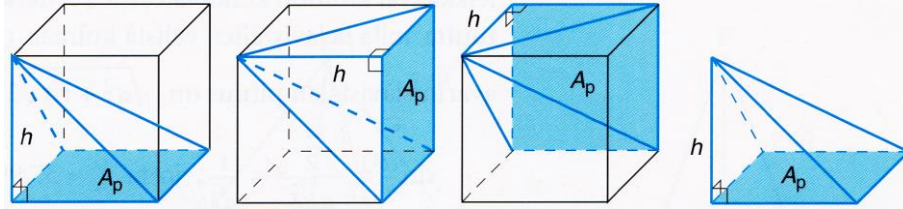
$A_v = \pi r s$ , missä  $s$  = kartion sivujana ja  $r$  = pohjaympyrän säde.

### Lause, kartion kokonaispinta-ala:

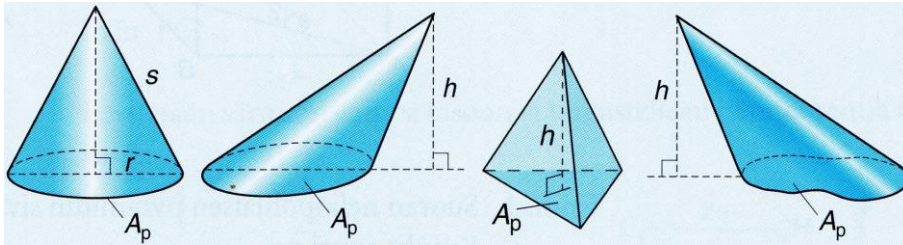
Kartion kokonaispinta-ala on vaipan ja pohjan pinta-alojen summa  $A = A_v + A_p$ .



Kuutio voidaan jakaa kolmeksi yhteneväksi pyramidiksi, joista kullakin on yksi kuution tahko pohjana ja joiden korkeus on kuution särmän pituinen. Kunkin pyramidin tilavuus on kolmasosa kuution tilavuudesta. Tämä tulos pätee kaikille kartioille.



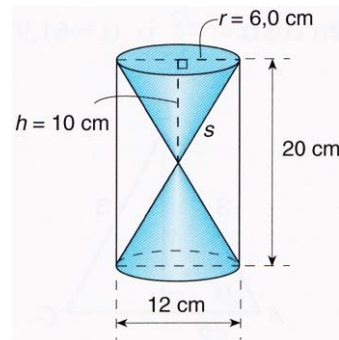
**Lause, kartion tilavuus:** Kartion tilavuus on kolmasosa yhtä korkean ja samanpohjaisen lieriön tilavuudesta, siis  $V = \frac{1}{3}A_p h$ .



**Esimerkki 1:** Tiimalasi muodostuu kahdesta kärjet vastakkain olevasta suorasta ympyräkartiosta. Tiimalasin korkeus on 20 cm ja pohjan halkaisija 12 cm.

a) Kuinka suuri on tiimalasin kokonaispinta-ala?

b) Kuinka paljon hiekkaa tähän tiimalasiin enimmillään mahtuu?



a) Lasketaan ensin sivujana  $s$  (merkitään yksiköt vasta loppuun)

$$s^2 = 10^2 + 6^2 = 136 \Rightarrow s = \pm\sqrt{136} = 2\sqrt{34} \text{ cm.}$$

Tiimalasin kokonaispinta-ala on

$$A = 2 \cdot A_p + 2 \cdot A_v = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 6^2}_{\text{molemmat pohjat}} + \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{136}}_{\text{molemmat vaipat}} \approx 670 \text{ cm}^2.$$

b) Hiekkaa voi enimmillään olla yhtä paljon kuin sitä mahtuu yhteen kartioon. Yhden kartion tilavuus on

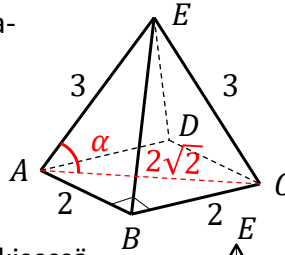
$$V = \frac{1}{3}A_p h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 10 \approx 380 \text{ cm}^3.$$

**Esimerkki 2:** Suoran neliöpohjaisen pyramidin sivusärmä on 3 ja pohjasärmä 2.

Kuinka suuri on

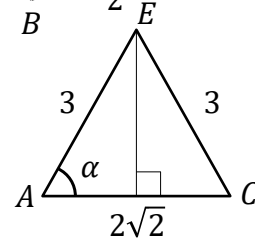
a) sivusärmän ja pohjan välinen kulma  $\alpha$  ja

b) Sivutahkon ja pohjan välinen kulma  $\beta$  ?



a) Kysytty kulma  $\alpha$  on kantakulma tasakylkisessä kolmiossa, jonka kyljet ovat 3 ja kanta  $2\sqrt{2}$ . Täten

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$  ja  $\alpha \approx 61,9^\circ$ .



b) Kulma  $\beta$  on kantakulma tasakylkisessä kolmiossa, jonka kyljet ovat  $\sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  ja kanta 2.

Täten  $\cos \beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  ja  $\beta \approx 69,3^\circ$ .

