AVARUUSGEOMETRIA

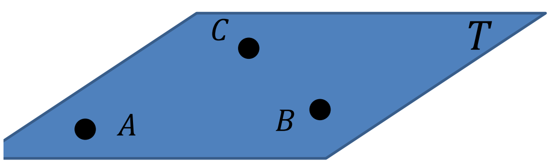
Avaruusgeometria tarkastelee kuvioita, joiden kaikki osat eivät ole samassa tasossa. Sana avaruus tarkoittaa yleisesti n-ulotteista, $n \geq 3$, avaruutta. (Lukiossa lähes aina $n = 3$.)

Suorat ja tasot avaruudessa

Määritelmä, taso:
Taso on *pinta*, joka sisältää täysin jokaisen suoran, jonka kanssa sillä on kaksi yhteistä pistettä.

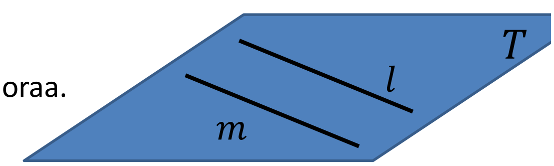
Tasoa merkitään yleensä isolla T-kirjaimella. Jokainen seuraavista ehdoista määrää avaruuden tason yksikäsitteisesti → kirjan kuvat:
- kolme tason pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla,
- kaksi yhdensuuntaista suoraa,
- kaksi toisiaan leikkaavaa suoraa ja
- suora ja suoran ulkopuolinen piste.

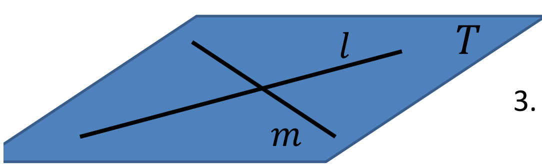
5-Kurssilla otetaan vielä vektorit mukaan tason määritelmään.



1. Kolme tason pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla.

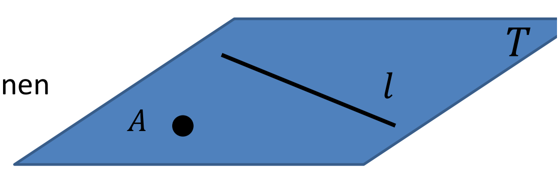
2. Kaksi yhdensuuntaista suoraa.



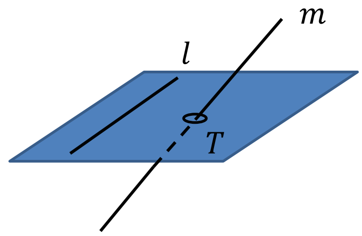


3. Kaksi toisiaan leikkaavaa suoraa.

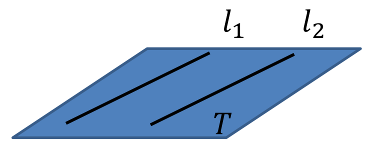
4. Suora ja suoran ulkopuolinen piste.



Huomaa ristikkäisten ja yhdensuuntaisten suorien ero:

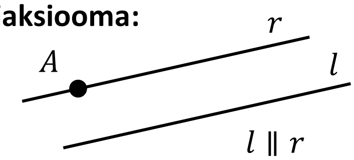


Ristikkäiset suorat eri tasolla.



Yhdensuun. suorat samalla tasolla.

Aksiooma, yhdensuuntaisuus- eli paralleeliaksiooma:
Suoran l ulkopuolella olevan pisteen A kautta voidaan piirtää yksi ja vain yksi suoran l kanssa yhdensuuntainen suora r.

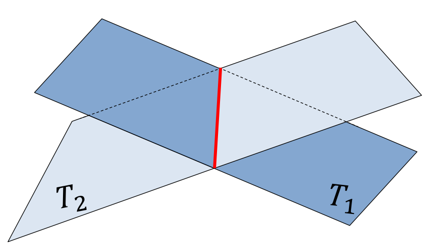


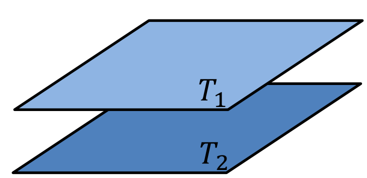
Suora l ja taso T voivat sijaita avaruudessa seuraavasti:

- ne leikkaavat toisensa → yksi yhteinen piste,
- suora l on tasossa T → äärettömän monta pistettä tai
- ne ovat yhdensuuntaiset → ei yhteisiä pisteitä.

Kaksi tasoa T_1 ja T_2 voivat sijaita avaruudessa seuraavasti:

- ne leikkaavat toisensa → syntyy leikkaussuora,
- ne ovat yhdensuuntaiset → ei yhteisiä pisteitä.
- ne yhtyvät, eli ovat samat



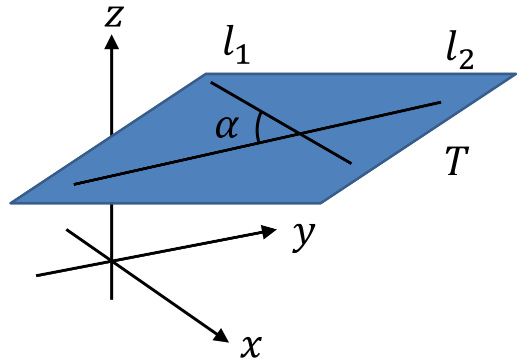


Tämä on selvää 3-ulotteisessa avaruudessa, entäs esim. 7-ulotteisessa? Silloin pitää ”luottaa” määritelmään ja edetä sen mukaan.

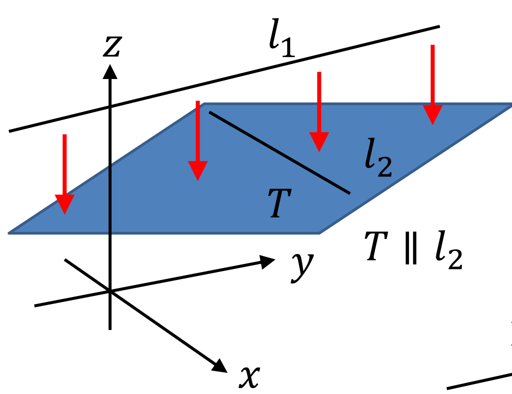
Suorien välinen kulma avaruudessa

Kahden, samassa tasossa olevan, avaruussuoran leikkauspisteeseen P muodostuneista kulmista pienintä sanotaan suorien väliseksi kulmaksi, jolle pätee $0° < \alpha \leq 90°$. Se voi siis olla suorakulma, mutta ei nolla-kulma.

Yhdensuuntaisten ja yhtyvien avaruussuorien välinen kulma on $0°$.

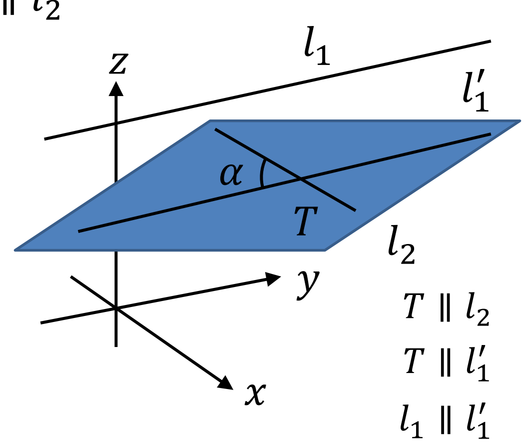


Jos kaksi suoraa *eivät* ole samassa tasossa, niiden välinen kulma on yhtä suuri kuin niiden kanssa yhdensuuntaisten ja toisiaan leikkaavien suorien välinen kulma. Eli mitä?

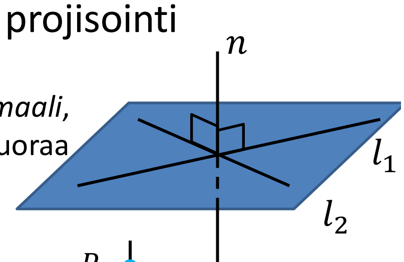


Projisoidaan suora l_1 tasolle T.

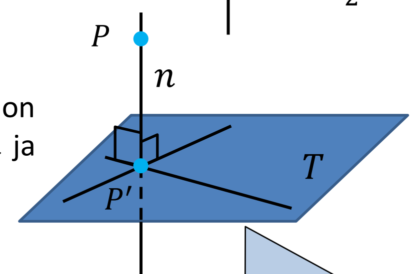
Lasketaan projektiosuoran l_1' ja suoran l_2 välinen kulma.



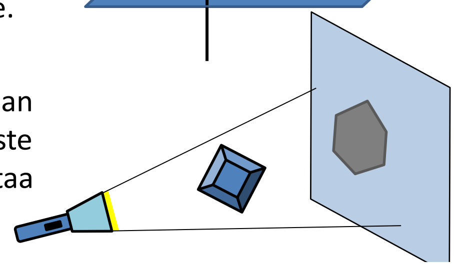
Tason normaali ja projisointi



Määritelmä, normaali:
Tasoa T leikkaava suora n, on *tason normaali*, jos se on kohtisuorassa jokaista tason suoraa l vastaan, eli $l_1 \perp n$, $l_2 \perp n$ joten $n \perp T$.

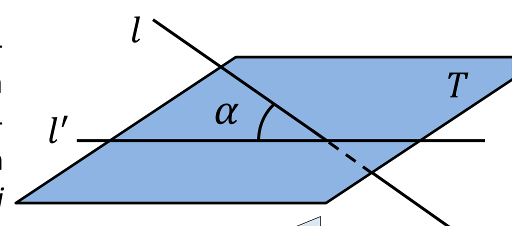


Määritelmä, pisteen projektio tasossa:
Pisteen P projektiopiste P' tasossa T on pisteen P kautta kulkevan normaalin n ja tason T leikkauspiste.
Projektiopiste P' on siis tason piste.

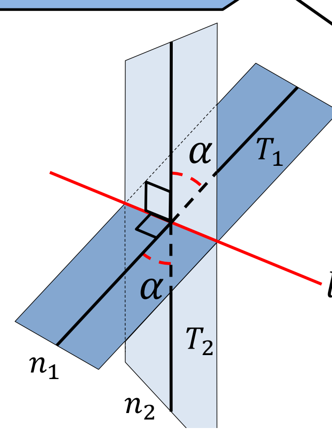


→ Kuvion projektio tasossa saadaan projisoimalla kuvion jokainen piste tasoon, esim. jana sivu 66. Vertaa taskulampulla tehtävä varjokuvio.

Kulmatarkastelua: suoran ja tason välinen kulma sekä tasojen välinen kulma



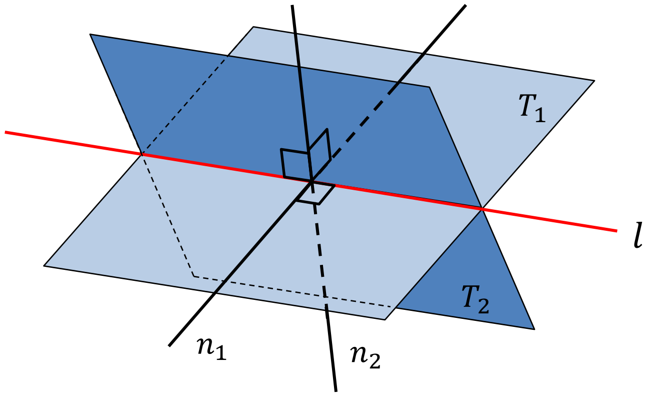
Suoran l ja tason T välinen kulma α on suoran l ja sen tasolla olevan projektiosuoran l' välinen kulma. Kulmaa α sanotaan myös suoran *kaltevuuskulmaksi* tason T suhteen.



Kahden tason välinen kulma on tasojen leikkaussuoralle l piirrettyjen normaalien, n_1 ja n_2, välinen kulma.

Jos tasot yhdensuuntaiset $\Rightarrow \alpha = 0°$.

Jos $\alpha = 90°$, niin sanotaan, että tasot ovat toistensa *normaalitasoja*.

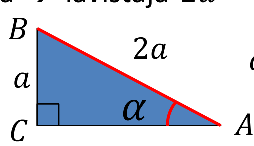


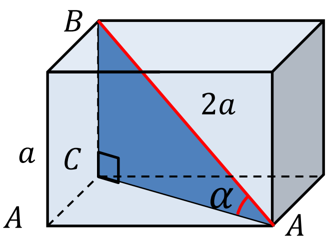
$$l \perp n_1$$
$$l \perp n_2$$
$$n_1 \perp n_2$$
$$T_1 \perp T_2$$

Esimerkki Suorakulmaisen särmiön korkeus on puolet avaruuslävistäjän pituudesta. Laske lävistäjän ja pohjan välinen kulma.

Ratkaisu

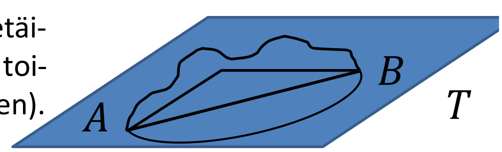
Merkitään korkeutta a:lla → lävistäjä $2a$
ja kulmaa α:lla → kuva.
MUISTIKOLMIO!
→ $\alpha = 30°$



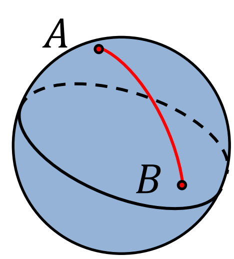


Etäisyyksiä

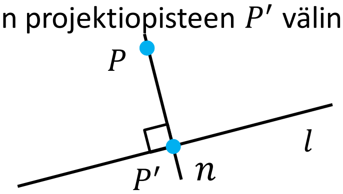
Kahden pisteen A ja B välinen etäisyys on lyhin välimatka pisteestä toiseen (Euklidisen metriikan suhteen). Esimerkiksi tasossa pisteiden välisen janan AB pituus.

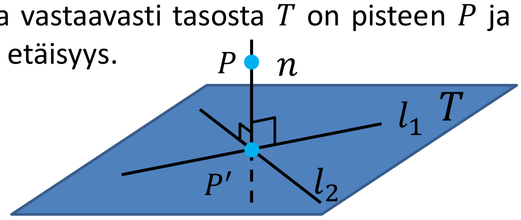


Kaarevilla pinnoilla (esim. pallopinta) etäisyyttä ei voi määrittää suoraviivaisesti. Pallopinnalla kahden pisteen A ja B välinen etäisyys on kaaren eikä janan pituus. Toisaalta ”suorat” pallopinnalla ovat ns. isoympyröitä (eli ”päiväntasaajan” kaltaisia).



Pisteen P etäisyys suorasta l ja vastaavasti tasosta T on pisteen P ja sen projektiopisteen P' välinen etäisyys.

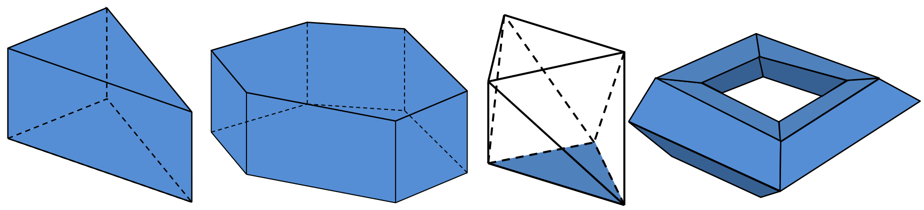




KAPPALEET

Monitahokas

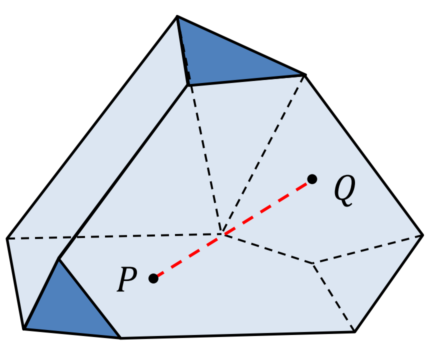
Määritelmä, monitahokas:
Monitahokas on *kappale*, jota rajaavat pinnat ovat tason osia.



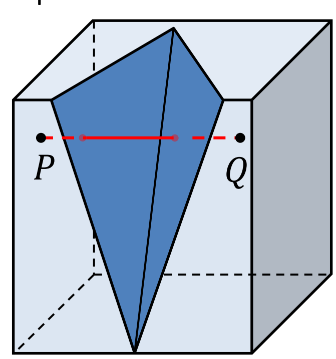
Nimityksiä: tahko = sivu, kärki, särmä = reuna, avaruuslävistäjä → katso myös kirjan sivu 141.
Tahkojen lukumäärän perusteella monitahokkaita kutsutaan neli-, viisi-, kuusi- jne. tahokkaiksi.

Erityisnimet: tetraedri (nelitahokas), pentaedri (viisitahokas) ja heksaedri (kuusitahokas).

Määritelmä, kupera ja kovera monitahokas:
Monitahokasta sanotaan *kuperaksi*, kun sen mitkä tahansa kaksi sisäpistettä voidaan yhdistää kokonaan monitahokkaan sisään jäävällä janalla, kts. kuva. Monitahokas, joka ei ole kupera on *kovera*.

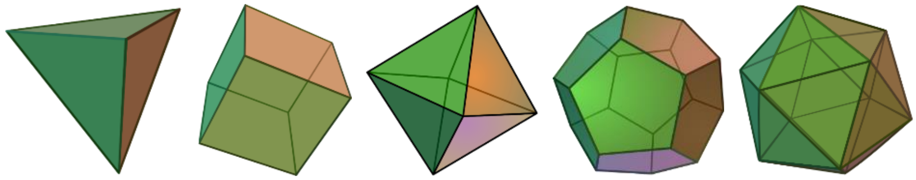


Kupera monitahokas



Kovera monitahokas

Määritelmä (jatkuu): Monitahokas on *säännöllinen*, jos sen kaikki tahkot ovat yhtenevät ja jokaisessa monitahokkaan kärjessä kohtaa sama määrä tahkoja. Säännöllisiä kuperia monitahokkaita on vain 5 kpl → niitä sanotaan Platonin monitahokkaiksi → kirjan s. 147 kuvat.



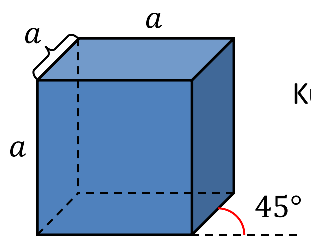
Tetraedri **Kuutio** **Oktaedri** **Dodekaedri** **Ikosaedri**

Älkää hämmästykö, näihin liittyy kaikenlaista ihmeellisyyksiä…netti…

PIIRTO: Piirtämisessä käytetään usein *kavaljeeriperspektiiviä*:

→ Syvyys piirretään $45°$ kulmassa ja pituudet puolitetaan.

→ Piilossa olevat ääriviivat (esim. särmät) piirretään katkoviivalla.



Kuvassa kuutio, jonka särmän pituus on a.

KAPPALEIDEN YHDENMUOTOISUUS

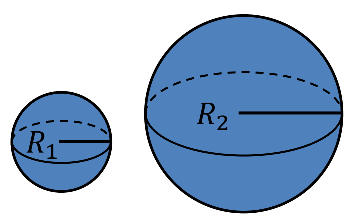
Periaate sama kuin tasossa:

Kappaleet ovat yhdenmuotoiset, jos niissä **vastinkulmat** ovat **yhtä suuret** ja **vastinjanat verrannolliset**.

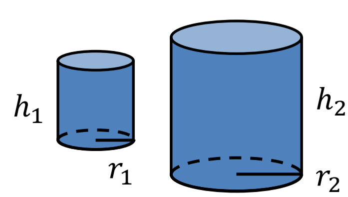
Huomioita:

1) Kuten kaikki ympyrät, niin kaikki pallot ja kuulat ovat keskenään yhdenmuotoiset. Mittakaava on säteiden suhde,

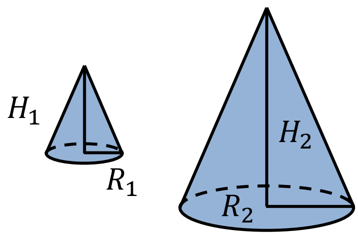
$$\frac{R_1}{R_2} = k.$$

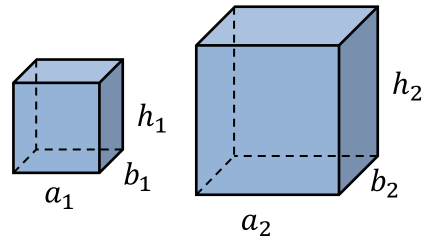


2) Suorat särmiöt, suorat ympyrälieriöt ja suorat ympyräkartiot ovat yhdenmuotoiset, jos niiden pohjat ovat yhdenmuotoiset ja korkeuksien suhde on sama kuin vastinjanojen suhde pohjissa.



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

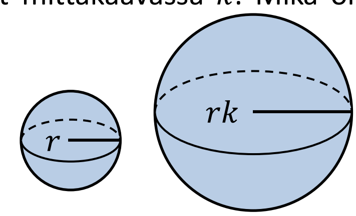




$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Esimerkki Pallot ovat yhdenmuotoiset mittakaavassa k. Mikä on pallojen tilavuuksien suhde?

Tilavuudet:



$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad V_2 = \frac{4}{3}\pi(rk)^3$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 k^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = k^3,$$ eli tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Tulos pätee yleisesti!

Lause, yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde:
Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio

$$\frac{V'}{V} = k^3,$$

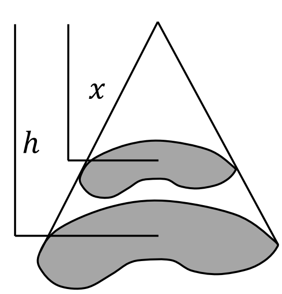
missä k on mittakaava.

Lisäksi avaruudessa tasokuvioille pätee: Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on (edelleen) mittakaavan neliö k^2.

Esimerkki Kartio jaetaan pohjan suuntaisella tasolla kahteen osaan siten, että osien tilavuudet ovat yhtä suuret. Missä suhteessa taso jakaa kartion korkeuden?

Merkitään: h=korkeus ja x=korkeus (pienempi).

Yhdenmuotoisuus antaa ($k = x/h$):



$$\left(\frac{x}{h}\right)^3 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^3}{h^3} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{h^3}{2}} = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$$

Taso jakaa kartion korkeuden huipusta lukien suhteessa…(loppu harjoitustehtävä).