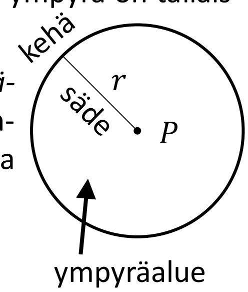
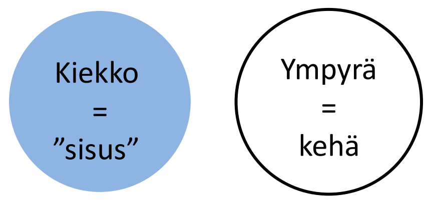
Ympyrä sekä kehä-, keskus- ja tangenttikulmat

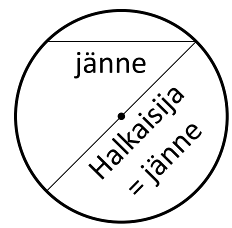
GEOMETRIA MAA3

Ympyrä: *Ympyrä* on niiden tason pisteiden joukko, jotka ovat säteen r etäisyydellä keskipisteestä P. Sanotaan, että ympyrä on tällaisten pisteiden *ura*.



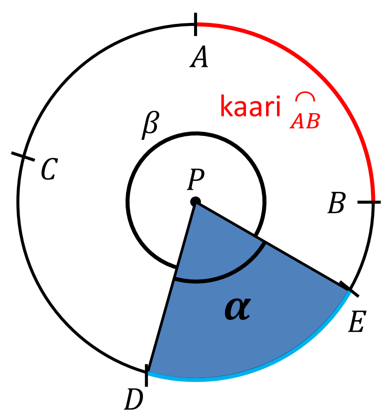
Määritelmän nojalla ympyrällä tarkoitetaan *ympyräviivaa* eli *kehää*. Keskipiste P ei näin ollen kuulu ympyrään. Ympyrä rajaa tasosta *ympyräalueen*, jota kutsutaan *kiekoksi*.





Nimityksiä: *Jänne* on jana, joka yhdistää kaksi ympyrän pistettä. *Halkaisija* on keskipisteen kautta kulkeva ympyrän jänne.

Nimityksiä: Ympyrän (=kehän) kahden pisteen rajaamaa osaa sanotaan *kaareksi*, huomaa merkintä $\overset{\frown}{AB}$. Parempi merkintätapa on käyttää kolmea kirjainta $\overset{\frown}{ACB}$, jottei tule väärinymmärrystä. Huom, koko ympyrä on myös kaari, $\overset{\frown}{AA}$.

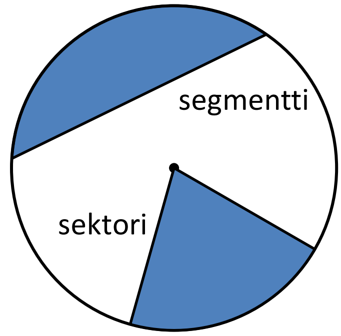


Kulmaa, jonka kärki on keskipisteessä P, kutsutaan *keskuskulmaksi*. Yhdistämällä kaaren DE päätepisteet säteillä keskipisteeseen saadaan *kaarta* $\overset{\frown}{DE}$ *vastaava keskuskulma*. Yhtähyvin voidaan puhua keskuskulmaa vastaavasta kaaresta.

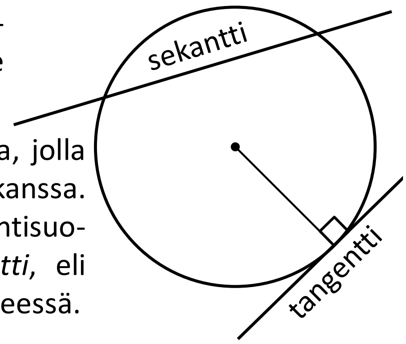
Kaarta $\overset{\frown}{DE}$ vastaa keskuskulma α ja kaarta $\overset{\frown}{DCE}$ keskuskulma β.

Koska kaarta vastaavan keskuskulman suuruus määrää täysin kaaren pituuden ja ympyrän kehän pituuden suhteen, niin sovitaan, että *kaaren asteluku on sama kuin sitä vastaavan keskuskulman asteluku*.

Nimityksiä: Keskuskulman rajaama ympyräalueen osa on *ympyrän sektori* ja kaaren ja jänteen rajaama ympyräalueen osa on *ympyrän segmentti*.
Huomaa, että molemmissa tapauksissa muodostuu kaksi sektoria/segmenttiä!

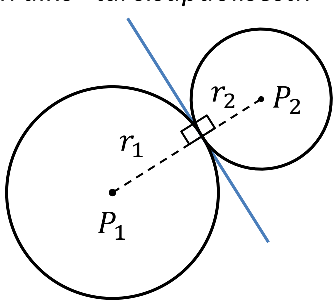


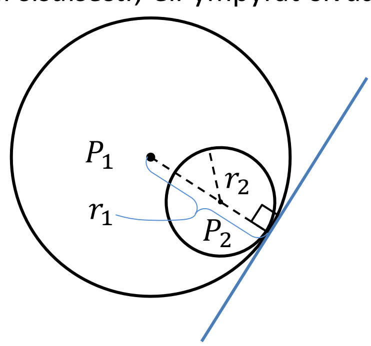
Sekä sektorin että segmentin keskuskulma voi olla välillä $]0°, 360°[$. Ympyräaluetta voidaan pitää sekä 360 asteen sektorina että myös 360 asteen segmenttinä. Entä puoliympyrä? Onko se segmentti vai sektori?



Ympyrän *tangentti,* eli *sivuaja*, on suora, jolla on vain yksi yhteinen piste ympyrän kanssa. Sivuamispisteeseen piirretty säde on kohtisuorassa tangentti kohti. Ympyrän *sekantti*, eli *leikkaaja*, leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä.

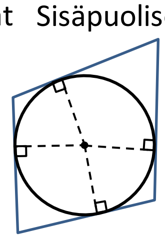
Kaksi ympyrää, joilla on yksi yhteinen piste, *sivuavat* toisiaan. Sivuaminen voi tapahtua joko *ulkoisesti* tai *sisäisesti*, eli ympyrät sivuavat toisiaan *ulko*- tai *sisäpuolisesti*.

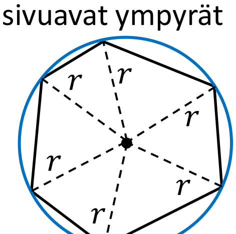




Ulkopuolisesti sivuavat ympyrät Sisäpuolisesti sivuavat ympyrät

Monikulmion *sisään piirretty ympyrä* sivuaa monikulmion jokaista sivua ja monikulmion *ympäri piirretty ympyrä* kulkee monikulmion jokaisen kärjen kautta.





Ympyrälaskuja: Palautetaan mieleen ympyrään liittyvät laskukaavat:

Ympyrän kehän pituus on

$$p = \pi \cdot d = \pi \cdot 2r, \qquad r = \text{säde ja } d \ = \text{halkaisija}$$

Ympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot r^2, \qquad r = \text{säde}$$

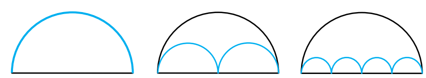
Kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r, \qquad r = \text{säde ja } \alpha = \text{keskuskulma}$$

Sektorin pinta-ala on

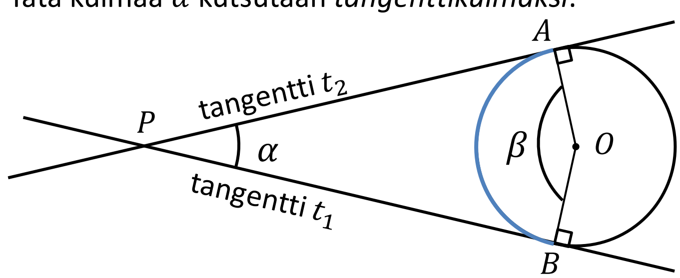
$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2, \qquad r = \text{säde ja } \alpha = \text{keskuskulma}$$

Vieressä olevassa kuvasarjassa suurimman puoliympyrän säteen pituus on 1. Laske kuvasarjaa jatkettaessa siihen viimeksi piirrettyjen puoliympyröiden kaarien yhteenlaskettu pituus, kun puoliympyröitä on 1,2,4, … , 2^n. Mitä paradoksaalista tulokseen liittyy?



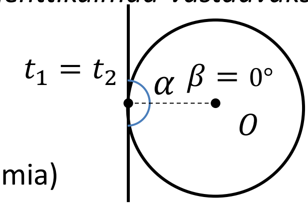
http://www.geogebra.org/en/upload/files/suomi/Hmakio/YmpPintaAla.html

Tangenttikulma: Kaksi toisiaan leikkaavaa ympyrän tangenttia t_1 ja t_2 muodostavat neljä kulmaa, joista yhden sisään ympyrä jää, katso kuva. Tätä kulmaa α kutsutaan *tangenttikulmaksi*.



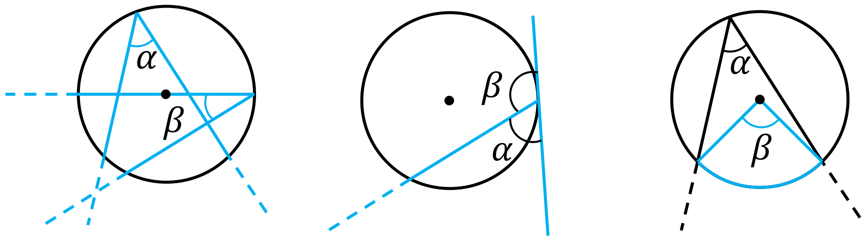
Sivuamispisteistä piirretyt säteet muodostavat kaksi keskuskulmaa. Joista pienempää, eli kulmaa β, sanotaan *tangenttikulmaa vastaavaksi keskuskulmaksi* ja vastaavaa kaarta $\overset{\frown}{AB}$ *tangenttikulmaa vastaavaksi kaareksi*.

Tangenttikulman asteluku on välillä
$]0°, 180°]$, eli myös oikokulma hyväksytään.



Pätee tulos: $\alpha + \beta = 180°$, (suplementtikulmia)

Kehäkulma: *Kehäkulmaksi* kutsutaan kulmaa, jonka kärki on ympyrän kehällä ja jonka kyljet leikkaavat ympyrää. Toisena kylkenä voi olla tangentti (rajatapaus). Kuten tangenttikulman tapauksessa, niin kylkien väliin jäävää kaarta kutsutaan *kehäkulmaa vastaavaksi kaareksi*. Kaarta vastaava keskuskulma on *kehäkulmaa vastaava keskuskulma*.

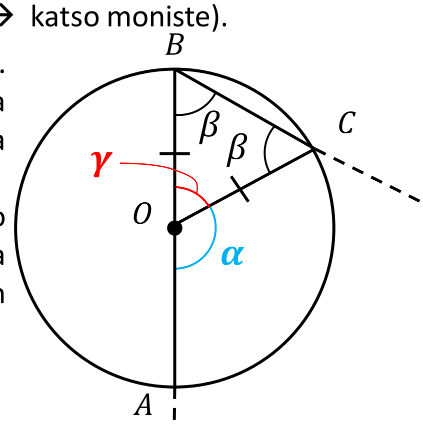


Kehäkulmalle ja keskuskulmalle pätee kolme tärkeää tulosta:

LAUSE 1: Kehäkulma on puolet keskuskulmasta.
LAUSE 2: Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtäsuuret.
LAUSE 3: Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

LAUSE 1: Kehäkulma on puolet keskuskulmasta.
Muodostuu kolme tapausta, tarkastellaan ensimmäistä tapausta, jossa keskipiste O on toisella kyljellä (muut → katso moniste).

TOD. Tapaus 1, keskipiste O kyljellä. Merkitään tarkasteltavaa kehäkulmaa $\sphericalangle ABC$ β:lla ja vastaavaa keskuskulmaa $\sphericalangle AOC$ α:lla.
Kun O on jänteellä AB, niin kolmio BOC on tasakylkinen (säde on kahtena eri sivuna, eli OC ja OB). Näin ollen myös kulma $\sphericalangle BCO = \beta$.



Kulmalle $\sphericalangle COB = \gamma$ saadaan:

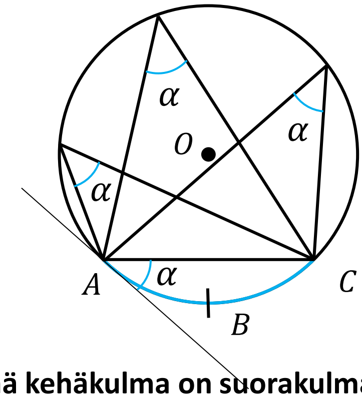
$$\begin{cases} \gamma = 180° - 2\beta, & \text{kolmion sivut yhteensä } 180° \\ \gamma = 180° - \alpha, & \text{vieruskulmat suplementtikulmia} \end{cases}$$

Siis

$$\gamma = \gamma \quad \text{eli} \quad 2\beta = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{2}.$$

LAUSE 2: **Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtäsuuret.**

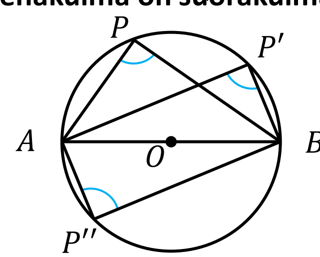
TOD. Koska kaikilla samaa kaarta, kuvassa $\overset{\frown}{ABC}$, vastaavilla kehäkulmilla on yhteinen kaarta vastaava keskuskulma, kuvassa $\sphericalangle AOC$, seuraa tulos välittömästi edellisestä lauseesta.



Esimerkki 1, moniste sivu 79.

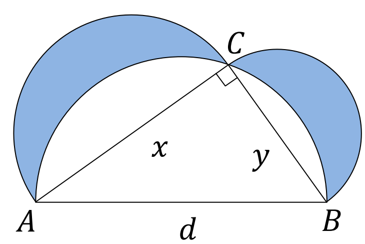
LAUSE 3: **Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma.**

TOD. Kehäkulmaa $\sphericalangle APB$ vastaava keskuskulma $\sphericalangle AOB$ on oikokulma, joten kulman $\sphericalangle APB$ asteluku on puolet eli $180°:2 = 90°$.



Esimerkki **Hippokrateen puolikuut:**

Hippokrateen puolikuut syntyvät siten, että puoliympyrän sisään piirretään suorakulmainen kolmio ABC, jonka kateetit CA ja CB halkaisijoina piirretään uudet puoliympyrät. Laske Hippokrateen puolikuiden yhteenlasketun pinta-alan (väritetty alue) suhde kolmion ABC pinta-alaan.



Olkoon kateetin CA pituus x ja kateetin CB pituus y. Tällöin kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2}xy.$$

Puoliympyrän halkaisija, merkitään d, on Pythagoraan nojalla

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Näin ollen puoliympyrän pinta-alaksi saadaan

$$r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad A_{\text{puoliympyrä}} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\pi(x^2+y^2)}{8}.$$

Vastaavalla tavalla lasketaan halkaisijoina CA ja CB olevien puoliympyröiden pinta-alat (säteen ala-indeksinä on sädettä vastaava halkaisija):

$$r_{CA} = \frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad A_{\text{puoliympyrä},CA} = \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi x^2}{8},$$

$$r_{CB} = \frac{y}{2} \quad \Longrightarrow \quad A_{\text{puoliympyrä},CB} = \frac{\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi y^2}{8}.$$

Näistä puoliympyröistä pitää vielä poistaa ison puoliympyrän osuus, jotta saadaan kysyttyjen Hippokrateen puolikuiden pinta-alat.

$$A_{\text{Hip.p.}} = A_{\text{kolmio}} + A_{\text{puoliymp.},CA} + A_{\text{puoliymp.},CB} - A_{\text{puoliympyrä}}$$

$$= \frac{1}{2}xy + \frac{\pi x^2}{8} + \frac{\pi y^2}{8} - \frac{\pi(x^2+y^2)}{8}$$

$$= \frac{1}{2}xy = A_{\text{kolmio}}.$$

Eli Hippokrateen puolikuiden yhteenlaskettu pinta-ala on sama kuin suorakulmaisen kolmion ABC pinta-ala, jolloin pinta-alojen suhteeksi tulee

$$\frac{A_{\text{Hippokrateen puolikuut}}}{A_{\text{kolmio}}} = \frac{\frac{1}{2}xy}{\frac{1}{2}xy} = 1.$$