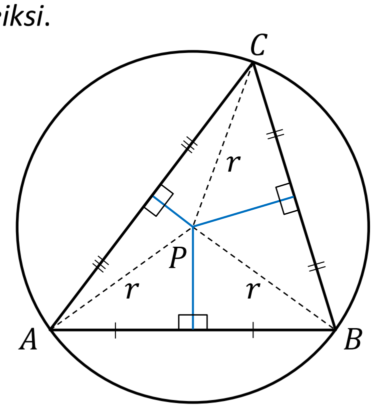
GEOMETRIA MAA3

Kolmion merkilliset pisteet ja kulman puolittajalause

Piirrettäessä kolmioille kulmanpuolittajia, sivujen keskinormaaleja, korkeusjanoja tai mediaaneja eli keskijanoja, niin osoittautuu, että näiden kaikkien suoraryhmien leikkauspisteet ovat erikoispisteitä. Pisteitä sanotaan *kolmion merkillisiksi pisteiksi*.

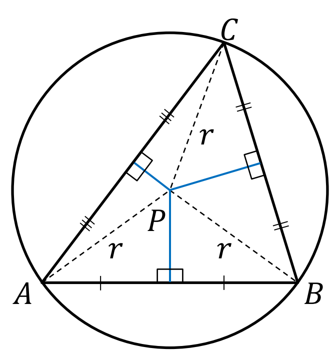
Lause 1 Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.



Oletus Kolmion ΔABC sivujen AC ja BC keskinormaalit leikkaavat pisteessä P.

Väite Sivun AB keskinormaali kulkee pisteen P kautta ja $PA = PB = PC = r$.

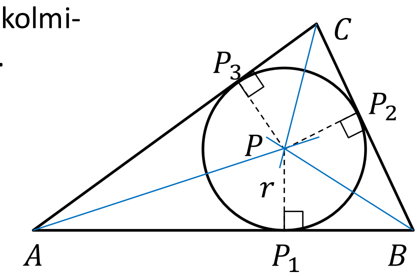
Todistus Koska P on janan AC keskinormaalilla, niin keskinormaalin uraominaisuuden perusteella $PA = PC$. Vastaavasti $PB = PC$. Siis $PA = PB$, joten P on janan keskinormaalin uraominaisuuden perusteella AB:n keskinormaalilla.
Koska $PA = PB = PC$, niin P on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.



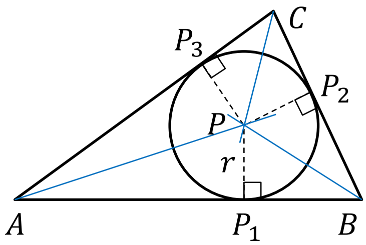
Lause 2 Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Oletus Kolmiossa ΔABC kulmien $\sphericalangle A$ ja $\sphericalangle B$ puolittajat leikkaavat pisteessä P.

Väite Kulman $\sphericalangle C$ puolittaja kulkee pisteen P kautta ja $PP_1 = PP_2 = PP_3 = r$.

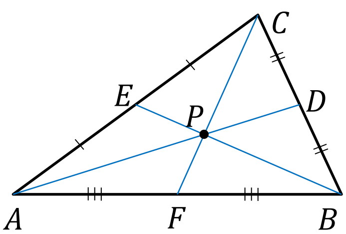


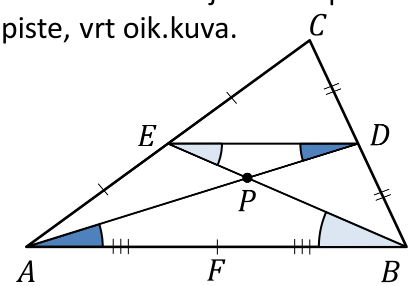
Todistus Kulman puolittajalle kuuluvat ne ja vain ne pisteet, jotka ovat yhtä kaukana kulman kyljistä. Koska P on kulmien $\sphericalangle A$ ja $\sphericalangle B$ puolittajilla, $PP_1 = PP_3$ ja $PP_1 = PP_2$. Tällöin $PP_2 = PP_3$, joten P on myös kulman $\sphericalangle C$ puolittajalla. Koska $PP_1 = PP_2 = PP_3 = r$, on P kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

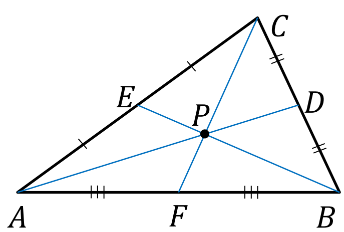


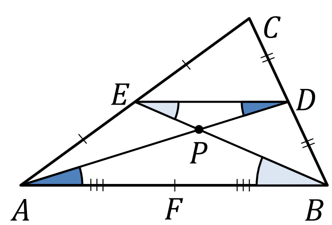
Lause 3 Kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa keskijanat kärjestä lukien suhteessa $2:1$.

Todistus Olkoot D, E ja F kolmion ΔABC sivujen keskipisteet sekä P keskijanojen AD ja BE leikkauspiste, vrt oik.kuva.









Todistus(jatkuu) Edellisen tunnin tuloksen nojalla $ED \parallel AB$ ja $ED = AB:2$. Tällöin samankohtaiset kulmat $\sphericalangle DEB$ ja $\sphericalangle ABE$ ovat yhtä suuret. Samoin $\sphericalangle ADE$ ja $\sphericalangle DAB$. Näin ollen $\Delta EDP \sim \Delta BAP$ (kk)-lause. Saadaan

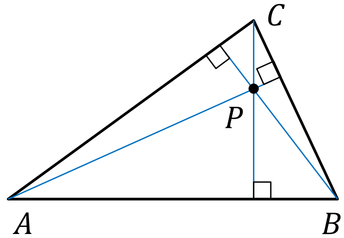
$$\frac{AB}{ED} = \frac{2}{1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{BP}{PE} = \frac{2}{1} \quad \text{ja} \quad \frac{AP}{PD} = \frac{2}{1}.$$

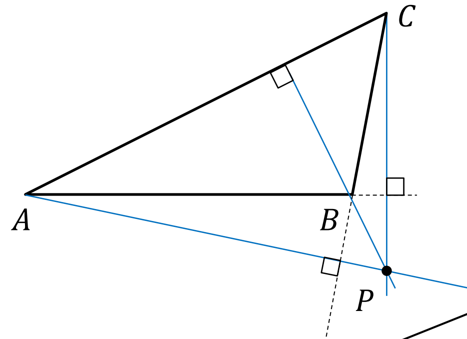
Piste P siis jakaa keskijanat AD ja BE kärjestä lukien suhteessa $2:1$.

Jos keskijana AD korvataan keskijanalla CF, niin vastaavat perustelut. Mutta kaksi eri pistettä ei voi jakaa samaa keskijanaa BE samassa suhteessa, joten myös keskijanojen BE ja CF leikkauspiste on P.

Näin ollen kolmion kaikki kolme keskijanaa leikkaavat siis samassa pisteessä, joka jakaa ne kärjestä lukien suhteessa $2:1$.

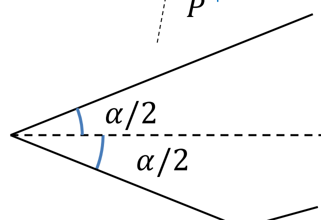
Lause 4 Kolmion korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa samassa pisteessä.



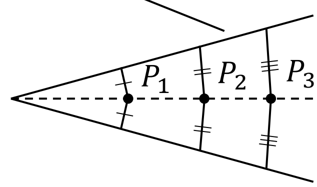


Todistus Sivuutetaan.

Määritelmä, kulman puolittaja:
Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.



Kulman puolittajan uraominaisuus
Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.



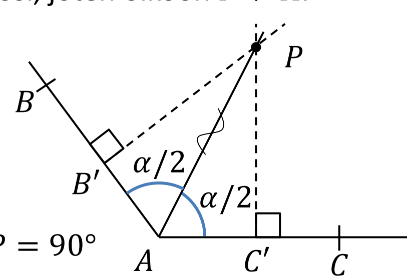
Kuten uraehtoihin yleensä, niin myös tähän kulman puolittajan uraehtoon sisältyy kaksi väitettä.

Lause 1:
Kulman puolittajan jokainen piste on yhtä kaukana kulman kyljistä tai niiden jatkeista.
Oletus: Piste P on kulman $\sphericalangle BAC = \alpha$ puolittajalla
Väite: Piste P on yhtä kaukana kyljistä AB ja AC tai niiden jatkeista.
Todistus: Jos $P = A$, niin väite on tosi, joten olkoon $P \neq A$.

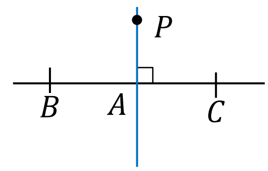
Tapaus 1: $0° < \alpha < 180°$
Olkoot B' ja C' pisteet, joissa kyljille piirretyt normaalit leikkaavat kyljet.
Tällöin

$$\Delta PB'A \cong \Delta PC'A \ \text{(kks)},$$

sillä $\sphericalangle PAB' = \sphericalangle PAC'$, $\sphericalangle AB'P = \sphericalangle AC'P = 90°$ ja PA on yhteinen.
Vastinjanoina $PB' = PC'$, joten P on yhtä kaukana kulman α kyljistä.



Tapaus 2: $\alpha = 180°$. Tällöin kulman puolittaja on kylkien määräämän suoran normaalin joten P:n etäisyys kummastakin kyljestä on PA.



Tapaus 4: $\alpha = 0°$ tai $\alpha = 360°$. Selvä, OK!

Tapaus 3: $180° < \alpha < 360°$. Kaavio+kuvio!

$$\sphericalangle PAB' = \frac{\alpha}{2} - \sphericalangle BAB' = \frac{\alpha}{2} - \sphericalangle CAC' = \sphericalangle PAC'$$

$\sphericalangle BAB'$ ja $\sphericalangle CAC'$ ristikulmia

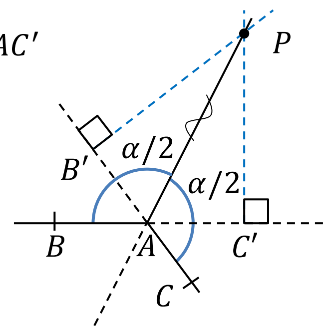
$\downarrow$

$\sphericalangle PAB' = \sphericalangle PAC'$

$\sphericalangle AB'P = \sphericalangle AC'P = 90°$

AP on yhteinen sivu

$\rightarrow$ $\Delta PB'A = \Delta PC'A$ (kks-lause) $\rightarrow$ $PB' = PC'$

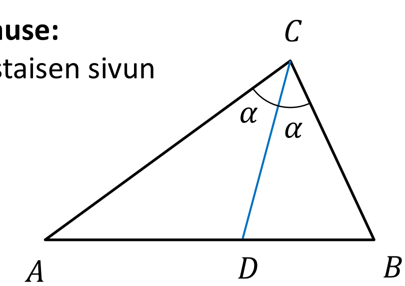


Lause 2:
Jokainen tason piste, joka on yhtä kaukana kulman kyljistä tai niiden jatkeista, on kulmanpuolittajalla.

Todistus: Harjoitustehtävä.

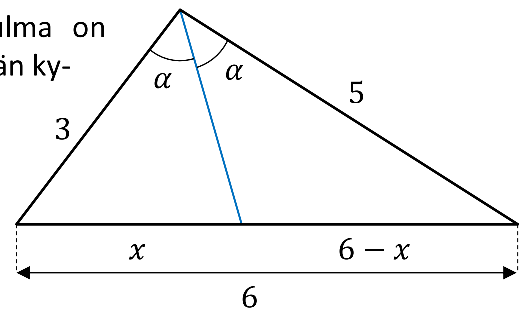
Lause, Kolmion kulman puolittajalause:
Kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}.$$



Todistus Kirjassa sivu 131 tai kurssi 4 vektorit.

Esimerkki Kolmion sivujen pituudet ovat 3, 5 ja 6. Laske niiden osien pituudet, joihin suurimman kulman puolittaja jakaa sen sivun.



Pisimmän sivun vastainen kulma on kolmion suurin kulma. Merkitään kysyttyjen osien pituuksia x:llä ja $6-x$:llä.
Tällöin kulman puolittajalauseen nojalla

$$\frac{x}{6-x}=\frac{3}{5}$$

$$5x=18-3x$$

$$8x=18$$

$$x=\frac{18}{8}=2\frac{1}{4}$$

Osien pituudet ovat siis $x=2\frac{1}{4}$ ja $6-x=6-2\frac{1}{4}=3\frac{3}{4}$.