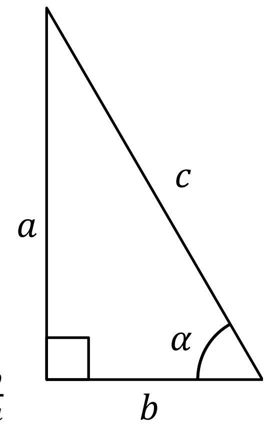
Määritelmä, (terävän kulman) trigonometriset funktiot:
Suorakulmaisessa kolmiossa terävän kulman *trigonometriset funktiot* ovat:

kulman sini $= \dfrac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$ $\quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$

kulman kosini $= \dfrac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$

kulman tangentti $= \dfrac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$ $\quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$

kulman kotangentti $= \dfrac{\text{viereinen kateetti}}{\text{vastainen kateetti}}$ $\quad \cot\alpha = \frac{b}{a}$



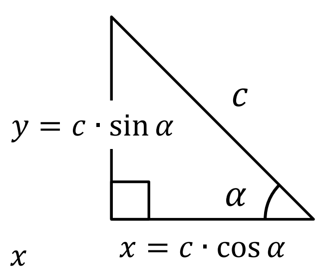
Näistä kotangenttia käytetään harvemmin.

Esimerkki:

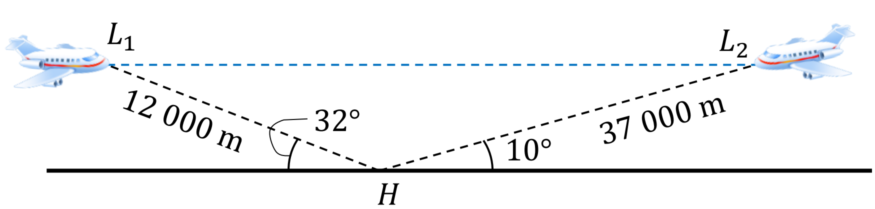
1) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on c ja toinen terävä kulma on α. Määritä kateetit.
Olkoon y kulman α vastainen kateetti ja x viereinen kateetti.
Yhtälöistä

$$\sin\alpha = \frac{y}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{c}$$

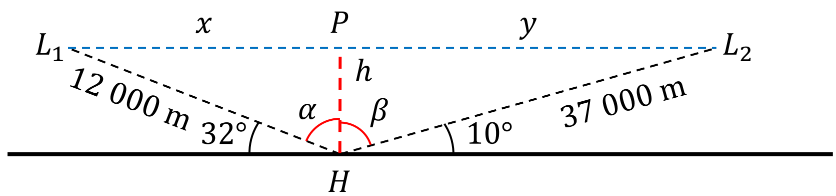
saadaan $y = c \cdot \sin\alpha$ ja $x = c \cdot \cos\alpha$.



2) Kaksi lentokonetta lähestyy toisiaan samalla korkeudella kuvan osoittamalla tavalla. Millä korkeudella ja kuinka kaukana toisistaan ne ovat?



Piirretään kolmiolle HL_1L_2 kärkipisteestä H korkeusjana HP. Merkitään muodostuvia etäisyyksiä ja kulmia kirjaimilla x, y, h ja α, β



Syntyy kaksi suorakulmaista kolmiota, joten

$$\alpha = 90° - 32° = 58° \quad \text{ja} \quad \beta = 90° - 10° = 80°,$$

$$h = 12\,000\text{ m} \cdot \cos 58° \approx 6\,400\text{ m} \quad \text{eli} \quad 6{,}4\text{ km},$$

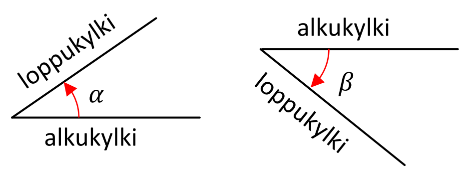
$$x = 12\,000\text{ m} \cdot \sin 58° \quad \text{ja} \quad y = 37\,000\text{ m} \cdot \sin 80°,$$

$$L_1L_2 = x + y = 12\,000\text{ m} \cdot \sin 58° + 37\,000\text{ m} \cdot \sin 80°,$$
$$\approx 47\,000\text{ m} \quad \text{eli} \quad 47\text{ km}$$

Siis korkeus on 6,4 km ja etäisyys 47 km.

EKSTRA: Tylpän kulman trigonometriaa

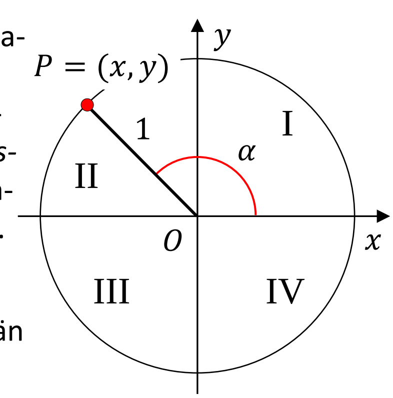
Määritelmä:
Kun puolisuora kiertyy tasossa alkupisteensä ympäri, niin näin syntynyttä kulmaa sanotaan *suunnatuksi kulmaksi*.



Suunnattu kulma α on positiivinen ja β negatiivinen.

HUOM! Kierron suuruutta ei rajoiteta.

Sijoitetaan suunnattu kulma xy-koordinaatistoon siten, että kulman α kärki on origossa ja oikea kylki positiivisella x – akselilla. Kulman α loppukylki leikkaa *origokeskisen yksikköympyrän* pisteessä P, jota sanotaan sanotaan kulman α *kehäpisteeksi*.

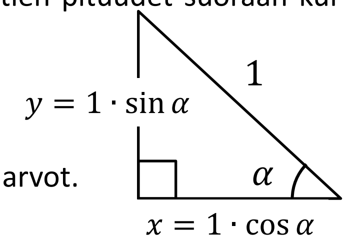


Jokaisella kulmalla on täsmälleen yksi kehäpiste. Toisaalta jokainen yksikköympyrän piste on ∞ monen eri kulman kehäpiste.

Tarkastelu yksikköympyrässä ei ole sattumaa, nimittäin kun hypotenuusa on ykkösen pituinen saadaan kateettien pituudet suoraan kulmasta α:

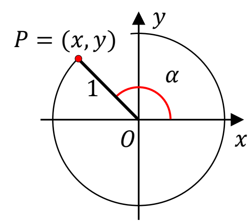
$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x$

Toisin sanoen, kateettien pituudet x ja y ilmoittavat suoraan kulman α sinin ja kosinin arvot.



Terävien kulmien sinit, kosinit ja tangentit määriteltiin suorakulmaisen kolmion avulla. Laajennetaan määritelmää kulmille $0° \leq \alpha \leq 180°$. Sijoitetaan annettu kulma yksikköympyrään siten, että kulman oikea kylki yhtyy positiiviseen x-akseliin ja kulman α suunta on positiivinen. Tällöin jokaisella suunnatulla kulmalla α on kehäpiste $P = (x, y)$.

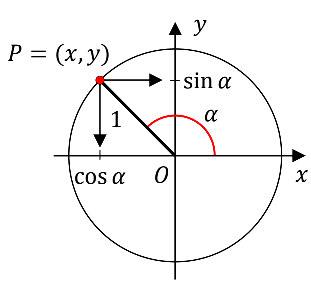
Määritelmä, kulman α sini ja kosini:
Kulman α sini on kehäpisteen P y-koordinaatti ja kulman α kosini on kehäpisteen P x-koordinaatti.
Siis $\quad \sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x.$

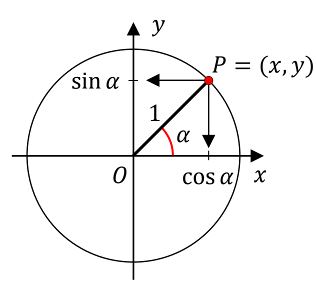


Määritelmä, kulman α tangentti:
Kulman α tangentti on kehäpisteen P y-koordinaatin ja x-koordinaatin välinen suhde. Siis $\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}, \quad \cos\alpha = x \neq 0.$

Huomaa, ettei tangentti ole sinin/kosinin tavoin määritelty kaikkialla!

Terävillä kulmilla $0° < \alpha < 90°$ uuden määritelmän mukaiset trigonometristen funktioiden arvot yhtyvät aiemman määrittelyn mukaisiin arvoihin, oikeanpuoleinen kuva.



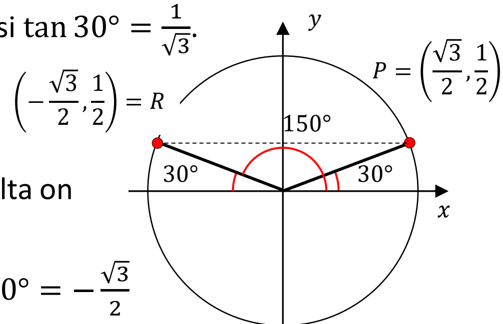


ULKOA! $\quad \sin 0° = 0, \ \sin 90° = 1, \ \sin 180° = 0$ ja
$\cos 0° = 1, \ \cos 90° = 0, \cos 180° = -1$.

Suplementti- ja vastakulmat

Suplementtikulmien summa on 180°. Miten lasketaan kulman α suplementtikulman $180° - \alpha$ trig. funktioiden arvot? Vastaus: Ne palautetaan kulman α trigonometristen funktioiden arvojen laskemiseen.

Esimerkki 30° kulman sini on $\frac{1}{2}$ ja kosini $\frac{\sqrt{3}}{2}$, joten tämän kulman kehäpiste on $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Lisäksi $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Kun kehäpiste P peilataan pystyakselin suhteen, saadaan piste $R = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, joka toisaalta on 150° kulman kehäpiste.

Näin ollen $\sin 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\tan 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Kulmat 30° ja 150° ovat toistensa supl.kulmia → kehäpisteet symmetriset → sinit samat, kosinit/tangentit vastalukuja.

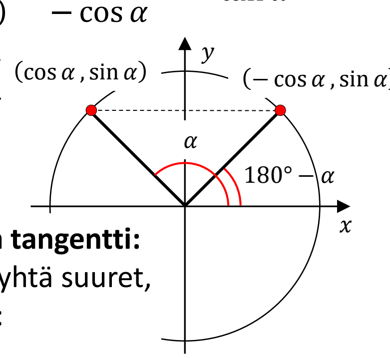
Esimerkki Kulman α kehäpiste on $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Tällöin piste $(-\cos\alpha, \sin\alpha)$ on kulman $180° - \alpha$ kehäpiste, joten

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha\,,$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha \quad \text{ja}$$

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

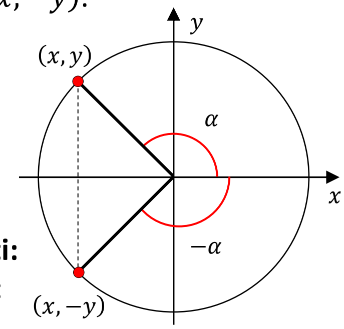
Näistä käytetään nimitystä *palautuskaavat* koska kulma ”palautetaan” ensimmäiseen neljännekseen, kts kuvat, s. 33. Kootaan vielä lauseeksi saadut tiedot.



Lause, suplementtikulman sini, kosini ja tangentti:
Kulman ja suplementtikulman sinit ovat yhtä suuret, kosinit ja tangentit toistensa vastalukuja:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$

Tarkastellaan lopuksi vastakulmia. Olkoon kulman α kehäpiste (x, y). Tällöin α:n vastakulman $-\alpha$ kehäpiste on $(x, -y)$.



Näin ollen

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$,

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ ja

$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha)$

Lause, vastakulman sini, kosini ja tangentti:
Kulman α vastakulman $-\alpha$ palautuskaavat:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$