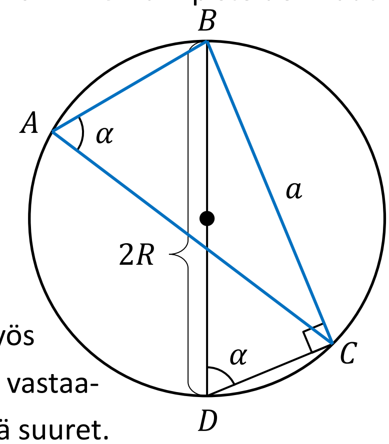
Sini- ja kosinilauseen sovelluksia

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde (T – 97)

Piirretään ympyrä, säde R, annetun kolmion ABC kärkipisteiden kautta ja ympyrälle halkaisija BD, katso kuva. Kun yhdistetään pisteet C ja D, saadaan suorakulmainen kolmio BCD, kulma C on kehäkulmana puolet vastaavasta keskuskulmasta, joka on oikokulma. Tarkastellaan tapauksia, joissa kulma $\alpha = \sphericalangle BAC$ on terävä, tylppä tai suora.



Tapaus 1. Kun kulma α on terävä, niin myös kulma $\sphericalangle BDC = \alpha$, sillä samaa kaarta $\overset{\frown}{BC}$ vastaavat kehäkulmat $\sphericalangle BAC$ ja $\sphericalangle BDC$ ovat yhtä suuret. Suorakulmaisessa kolmiossa BCD on

$$\frac{a}{2R} = \sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

HUOM! Kulma B eli $\sphericalangle ABC$ ei ole suora kulma.

Tapaus 2. Kun kulma α on tylppä, niin kehäkulmia $\sphericalangle CAB = \alpha$ ja $\sphericalangle BDC$, vastaavien kaarien astelukujen summa on $360°$(kaaret peittävät koko ympyrän). Näiden kehäkulmien summa on siten $180°$ ja $\sphericalangle BDC = 180° - \alpha$. Suorakulmaisesta kolmiosta BCD saadaan

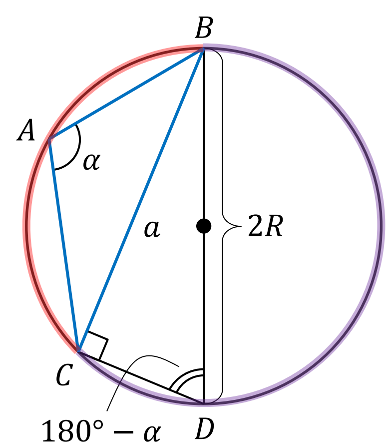
$$\frac{a}{2R} = \sin(180° - \alpha),$$

ja koska kulman ja sen suplementtikulman sinit ovat yhtä suuret, eli

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$

niin

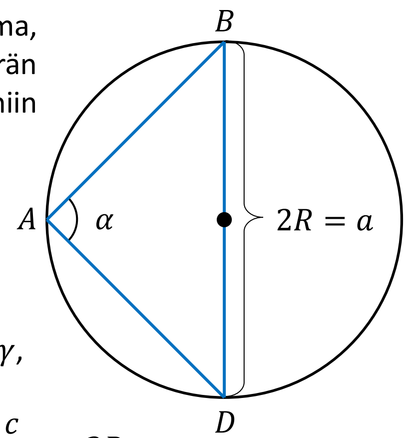
$$\frac{a}{2R} = \sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$



Tapaus 3. Kun kulma α on suorakulma, niin sitä vastaava jänne a on ympyrän halkaisija $2R$. Koska $\sin 90° = 1$, niin myös tässä tapauksessa yhtälö

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

on tosi.



Tarkastelemalla vastaavasti kulmia β ja γ, saadaan sama tulos, eli

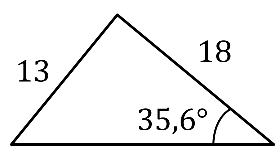
$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R, \qquad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Sinilause $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ voidaan siis täydentää muotoon

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

missä R on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

Esimerkki 1 Kolmion kaksi sivua ovat 13 ja 18 sekä näistä lyhyemmän vastainen kulma 35,6°. Laske kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

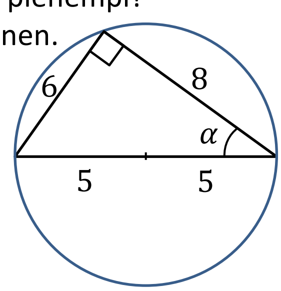


Kysytylle säteelle R saadaan sinilauseen avulla yhtälö

$$2R = \frac{13}{\sin 35{,}6°}, \qquad \text{josta} \quad R = \frac{13}{2\cdot\sin 35{,}6°} \approx 11.$$

Esimerkki 2 Kolmion sivut ovat $6, 8$ ja 10. Kuinka monta prosenttia kolmion ala on sen ympäri piirretyn ympyrän alaa pienempi?

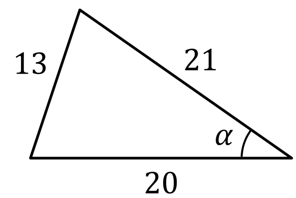
Koska $6^2 + 8^2 = 10^2$, niin kolmio on suorakulmainen. Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, joten hypotenuusa on kolmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija. Ympyrän säde on siis 5. Kolmion ja ympyrän alojen suhteeksi saadaan



$$\frac{0{,}5\cdot 6\cdot 8}{\pi\cdot 5^2} = \frac{24}{25\pi} \approx 0{,}306.$$

Kolmion ala on näin ollen 30,6% kolmion ympäri piirretyn ympyrän alasta. Eli kolmion ala on 69,4% ympyrän alaa pienempi.

Esimerkki 3 Kolmion sivut ovat $13, 20$ ja 21. Laske kolmion **a)** ympäri ja **b)** sisään piirretyn ympyrän säde.



Olkoon α kolmion pienin kulma. Yhtälöstä

$$13^2 = 20^2 + 21^2 - 2 \cdot 20 \cdot 21 \cdot \cos\alpha$$

saadaan

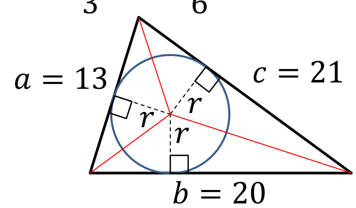
$$\cos\alpha = \frac{400 + 441 - 169}{840} = \frac{4}{5}.$$

Tällöin $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{9}{25}$ ja edelleen $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

a) Jos kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on R, niin sinilauseen avulla saadaan

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{13}{\frac{3}{5}} = \frac{65}{3} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{65}{3} = 10\frac{5}{6}.$$

b) Olkoon kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r. Kun yhdistetään kolmion kärjet ympyrän keskipisteeseen, saadaan kolme osakolmiota.



Kolmion ala on näiden osakolmioiden alojen summa, saadaan

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r = \frac{a + b + c}{2} \cdot r = pr,$$

missä $p = \frac{a+b+c}{2}$ on kolmion piirin puolikas.

Kolmion ala

$$A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 \cdot \sin\alpha = 210 \cdot \frac{3}{5} = 126$$

ja piirin puolikas

$$p = \frac{13 + 20 + 21}{2} = 27.$$

Näin ollen säteeksi saadaan

$$r = \frac{A}{p} = \frac{126}{27} = 4\frac{2}{3}.$$