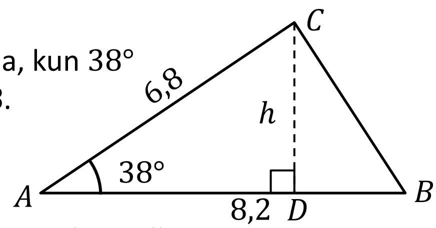
Sinilause ja kosinilause

Mikäli kolmion korkeus ja kanta tiedetään, voidaan pinta-ala laskea.

Esimerkki: Laske kolmion ABC ala, kun $38°$ kulman viereiset sivut ovat 8,2 ja 6,8.
Nyt kanta tiedetään, korkeutta ei!



Piirretään korkeusjana $h = CD$ kärjestä C kannalle $AB = 8{,}2$.
Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta ADC saadaan yhtälö

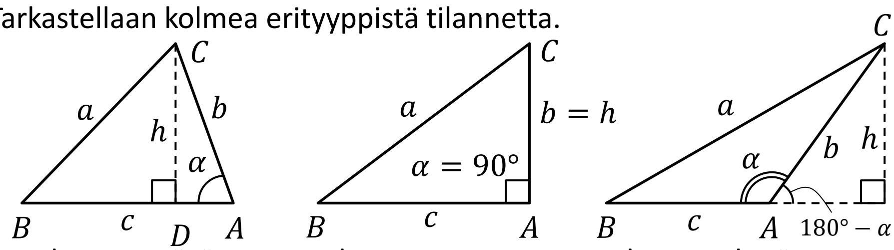
$$\sin 38° = \frac{h}{6{,}8} \quad \Longrightarrow \quad h = \sin 38° \cdot 6{,}8 = 4{,}18\ldots$$

Kolmion alaksi saadaan

$$A_{\text{kolmio}, ABC} = 0{,}5 \cdot 8{,}2 \cdot \sin 38° \cdot 6{,}8 = 17{,}164\ldots \approx 17.$$

Vastaavalla tavalla voidaan menetellä yleisen vinokulmaisen kolmion (suora, terävä tai tylppä) alan määrittämisessä. Merkitään kolmion sivuja a, b, c sekä niiden vastaisia kulmia α, β, γ.

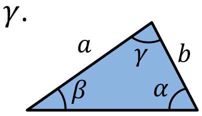
Tarkastellaan kolmea erityyppistä tilannetta.



Kulma α terävä	Kulma α suora	Kulma α tylppä
$\sin\alpha = \frac{h}{b}$	$\sin\alpha = \sin 90° = 1$	$\sin(180° - \alpha) = \frac{h}{b}$
$h = b\sin\alpha$	$h = b = b\sin\alpha$	$h = b\sin\alpha$

Havaitaan, että kolmion muodosta riippumatta kolmion ala on aina $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot c = \frac{1}{2} \cdot bc\sin\alpha$, missä α on sivujen b ja c välinen kulma.
Tarkastelemalla vastaavasti kulman α asemasta kulmia β ja γ saadaan vastaavasti kolmion alalle $A = \frac{1}{2} \cdot ac\sin\beta = \frac{1}{2} \cdot ab\sin\gamma$.

Lause, kolmion ala:

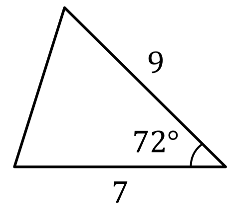


Kolmion ala on puolet kahden sivun ja niiden välisen kulman sinin tulosta. $A = \frac{1}{2} \cdot bc\sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot ac\sin\beta = \frac{1}{2} \cdot ab\sin\gamma$.

Esimerkki: Laske kolmion ala.

Ala on

$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sin 72° \approx 30.$



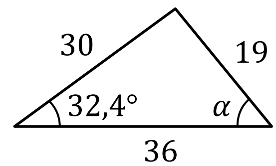
Esimerkki: Laske kolmion ala ja kulma α.

Ala on $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 \cdot \sin 32{,}4° \approx 290.$

Ratkaistaan kulma α pinta-alan lausekkeesta, sillä

$$A = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 \cdot \sin 32{,}4° = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 36 \cdot \sin \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \sin \alpha = \frac{30}{19} \cdot \sin 32{,}4° = 0{,}8460 \ldots \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 57{,}8°.$$

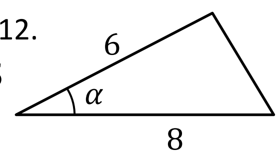


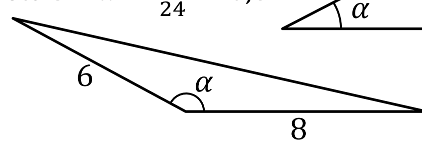
Esimerkki: Laske kulma α, kun kolmion ala on 12.

Ala on $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin \alpha = 12$, josta $\sin \alpha = \frac{12}{24} = 0{,}5$

ja edelleen $\alpha = 30°$

TAI $\alpha = 150°$.



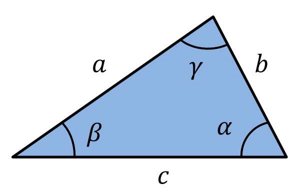


Edellä on osoitettu, että kolmion ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot bc \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot ac \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot ab \sin \gamma.$$

Jaetaan yhtälöt luvulla $\frac{1}{2}abc$, jolloin saadaan

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$



Lause, Sinilause:

Kolmiossa sivun ja sivun vastaisen kulman sinin suhde on vakio

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

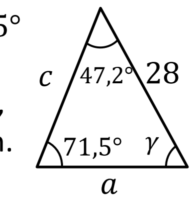
Lause voidaan esittää myös muodossa $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.

Mitä jälkimmäinen esitysmuoto tarkoittaa?

Vinokulmainen kolmio voidaan siis ratkaista käyttämällä sinilausetta, kun kolmiosta tunnetaan

1. Kaksi kulmaa ja yksi sivu tai
2. Kaksi sivua ja toisen sivun vastainen kulma (mahd. 2 eri kolmiota!)

Esimerkki: Kolmion kaksi kulmaa ovat $47{,}2°$ ja $71{,}5°$ sekä pisin sivu 28. Laske kolmion muut osat.



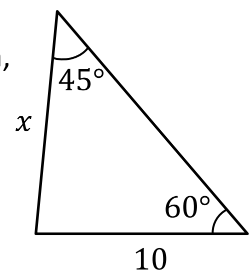
Kolmion kolmas kulma on $180° - 47{,}2° - 71{,}5° = 61{,}3°$, siis $\gamma = 61{,}3°$. Suurimman kulman vastainen sivu on pisin.

Sinilauseen nojalla

$$a = \frac{28 \cdot \sin 47{,}2°}{\sin 71{,}5°} \approx 22, \qquad c = \frac{28 \cdot \sin 61{,}3°}{\sin 71{,}5°} \approx 26.$$

Esimerkki: Kolmion kaksi kulmaa ovat $60°$ ja $45°$ sekä pienimmän kulman vastainen sivu 10. Laske tarkka arvo sen sivun pituudelle, jonka vastainen kulma on $60°$.

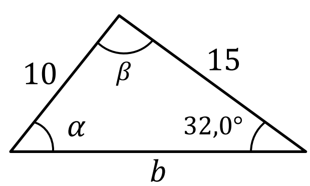
Piirretään aluksi kolmio annetuilla tiedoilla. Huomaa, että pienin kulma on $45°$.



Sinilausetta hyödyntäen saadaan:

$$\frac{10}{\sin 45°} = \frac{x}{\sin 60°} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{10 \cdot \sin 60°}{\sin 45°} = 5\sqrt{6}.$$

Esimerkki: Laske kulmat α ja β sekä sivu b.

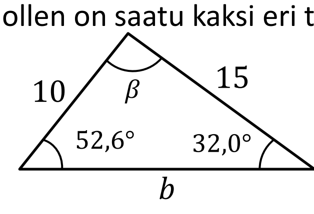


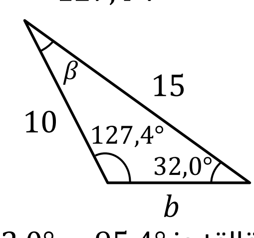
Sinilausetta käyttäen, saadaan:

$$\frac{15}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 32{,}0°}, \qquad \text{josta} \quad \sin \alpha = \frac{15 \cdot \sin 32{,}0°}{10},$$

ja edelleen $\alpha \approx 52{,}6°$ tai $\alpha \approx 180° - 52{,}6° = 127{,}4°$.

Näin ollen on saatu kaksi eri tapausta:





Kun $\alpha = 52{,}6°$, niin $\beta = 180° - 52{,}6° - 32{,}0° = 95{,}4°$ ja tällöin

$$\frac{b}{\sin 95{,}4°} = \frac{10}{\sin 32{,}0°}, \qquad \text{josta} \quad b = \frac{10 \cdot \sin 95{,}4°}{\sin 32{,}0°} \approx 19\,.$$

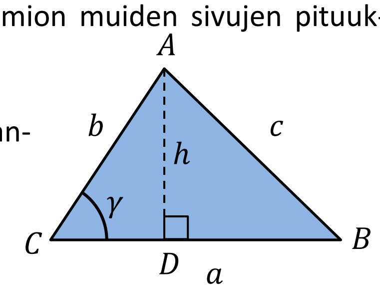
Kun $\alpha = 127{,}4°$, niin $\beta = 180° - 127{,}4° - 32{,}0° = 20{,}6°$ ja tällöin

$$\frac{b}{\sin 20{,}6°} = \frac{10}{\sin 32{,}0°}, \qquad \text{josta} \quad b = \frac{10 \cdot \sin 20{,}6°}{\sin 32{,}0°} \approx 6{,}6\,.$$

Kosinilause

Tarkastellaan seuraavaksi kolmion kulman vastaisen sivun pituuden riippuvuutta kulman suuruudesta ja kolmion muiden sivujen pituuksista.

Kolmion kärjestä A kannalle BC piirretyn korkeusjanan $AD = h$ kantapiste D on kannalla tai sen jatkeella riippuen siitä onko kulma $C = \gamma$ terävä vai tylppä. Saadaan kolme tapausta:



Tapaus 1: Kun kulma $\gamma < 90°$, niin

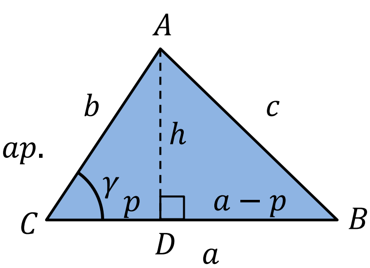
$$h^2 = b^2 - p^2 = c^2 - (a - p)^2,$$

josta

$$c^2 = b^2 - p^2 + (a - p)^2 = a^2 + b^2 - 2ap.$$

Koska $\frac{p}{b} = \cos\gamma$, niin on $p = b \cdot \cos\gamma$ ja näin ollen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma\,.$$

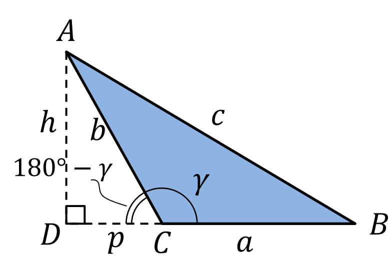


Tapaus 2: Kun kulma $\gamma > 90°$, niin

$$h^2 = b^2 - p^2 = c^2 - (a + p)^2,$$

josta

$$c^2 = b^2 - p^2 + (a + p)^2$$
$$= a^2 + b^2 + 2ap.$$



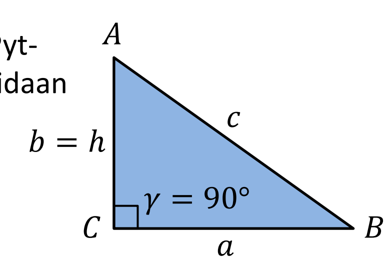
Koska $\frac{p}{b} = \cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$, niin on $p = -b \cdot \cos\gamma$ ja näin ollen

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a(-b \cdot \cos\gamma) = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma\,.$$

Tapaus 3: Kun kulma $\gamma = 90°$, niin Pythagoraan nojalla $c^2 = a^2 + b^2$. Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90°\,,$$

sillä $\cos 90° = 0$.



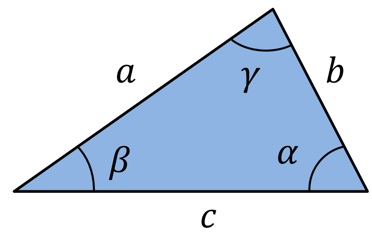
Havaitaan, että kaikilla kulman γ arvoilla pätee yhtälö

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma\,,$$

jota sanotaan kosinilauseeksi.

Lause, Kosinilause:
Kolmiossa ABC on

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma\,,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta\,,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha\,.$$



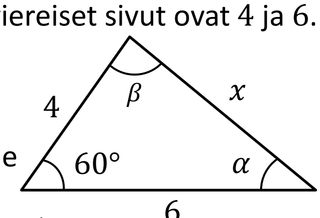
Jos kulma $\gamma = 90°$, kosinilause on Pythagoraan lause $c^2 = a^2 + b^2$, eli Pythagoraan lause on kosinilauseen erikoistapaus. Miten perustelisit *Pythagoraan lauseen käänteislauseen* kosinilausetta käyttäen?

Vinokulmainen kolmio voidaan ratkaista kosinilausetta käyttäen silloin, kun kolmiosta tunnetaan

1. Kaikki sivut tai
2. Yksi kulma ja kaksi sivua

Esimerkki: Kolmiossa $60°$ asteen kulman viereiset sivut ovat 4 ja 6.

a) Laske kolmas sivu x,
b) Kuinka suuret ovat muut kulmat (α, β)?

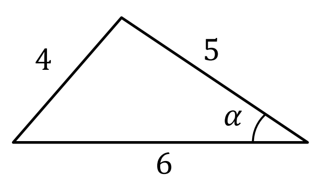


a) Käytetään kosinilausetta $60°$ asteen kulmalle ja saadaan yhtälö

$$x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60° = 16 + 36 - 48 \cdot \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

b) Sinilauseen nojalla $\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{7}}{\sin 60°}$, josta $\sin\alpha = \frac{4 \cdot \sin 60°}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ja $\alpha \approx 40{,}9°$ (tai $\alpha \approx 139{,}1°$). Tällöin $\beta \approx 79{,}1°$ (tai $\beta \approx -19{,}1°$ HYL).

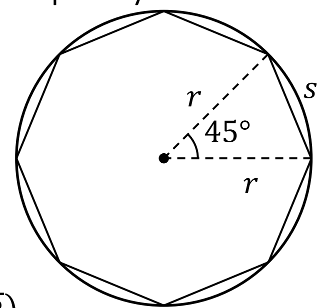
Esimerkki: Kolmion sivut ovat $4{,}5$ ja 6.
Kuinka suuri on sen pienin kulma?
Kolmiossa lyhintä sivua vastaa pienin kulma.
Kosinilauseen nojalla



$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{16 - 25 - 36}{-60} = \frac{3}{4},$$

josta kulmaksi α saadaan $\alpha \approx 41{,}4°$.

Esimerkki: Laske r-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kahdeksankulmion sivun s pituus.



Koska sivua s vastaava keskuskulma on

$$\alpha = \frac{360°}{8} = 45°,$$

Niin

$$\begin{aligned} s^2 &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 45° \\ &= 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = r^2\left(2 - \sqrt{2}\right), \end{aligned}$$

josta

$$s = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$