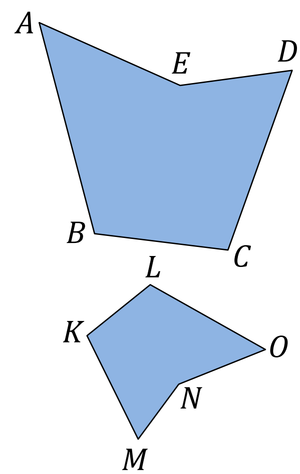
Yhdenmuotoisuus ja mittakaava

Tasokuvioiden yhdenmuotoisuus tarkoittaa havainnollisesti sitä, että kuviot ovat samanmuotoiset mutta eivät välttämättä samankokoiset. Kahdella yhdenmuotoisella kuviolla täytyy olla yhtä monta kärkeä → voidaan sopia mitkä kärjet ovat toistensa *vastinkärkiä*. Vastinkärkien avulla määrätään *vastinsivut* ja *vastinkulmat*.

Vastinkärjet	Vastinsivut	Vastinkulmat
A ja O	AB ja OL	$\sphericalangle ABC$ ja $\sphericalangle OLK$
B ja L	BC ja LK	$\sphericalangle BCD$ ja $\sphericalangle LKM$
C ja K	CD ja KM	$\sphericalangle CDE$ ja $\sphericalangle KMN$
D ja M	DE ja MN	$\sphericalangle DEA$ ja $\sphericalangle MNO$
E ja N	EA ja NO	$\sphericalangle EAB$ ja $\sphericalangle NOL$



Kärkien vastaavuudet määräävät myös muita vastaavuussuhteita, kuten vastinlävistäjät jne.

Määritelmä, yhdenmuotoisuus:
Monikulmio M_1 on *yhdenmuotoinen* monikulmion M_2 kanssa, merkitään $M_1 \sim M_2$, jos monikulmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivujen pituuksien suhteet ovat yhtä suuret eli vastinsivut ovat verrannolliset

$$M_1 \sim M_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{a_1}{a'_1} = \dfrac{a_2}{a'_2} = \ \dots = \dfrac{a_n}{a'_n} \\ \alpha_1 = \alpha'_1, \alpha_2 = \alpha'_2, \dots, \alpha_n = \alpha'_n \end{cases}.$$

Yhdenmuotoisten monikulmioiden vastinsivujen pituuksien suhdetta kutsutaan *mittakaavaksi* k.

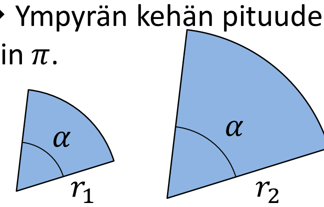
Huomautus **a)** Mittakaavan tarkoittama vastinsivujen suhde muodostetaan siinä järjestyksessä, missä järjestyksessä kuviot mainitaan. Siis, jos monikulmiot $M_1 \sim M_2$ mittakaavassa $2:3$, niin tällöin monikulmiot $M_2 \sim M_1$ mittakaavassa $3:2$.
b) Yhtenevät monikulmiot ovat myös yhdenmuotoiset, sillä vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivujen pituuksien suhteet ovat samat, eli tällöin mittakaava $k = 1$.

Esimerkki Arkkitehti laatii pienoismallin asuinalueesta, joka on suorakulmion muotoinen. Mallin tulee mahtua $0{,}80\ \mathrm{m} \times 1{,}80\ \mathrm{m}$ kokoiselle pöydälle. Mikä on sopiva pienoismallin mittakaava, kun asuinalueen todellinen koko on $125\ \mathrm{m} \times 300\ \mathrm{m}$?

Ratkaisu Asuinalueen leveyden $125\ \mathrm{m}$ suhde suurimpaan mahdolliseen pienoismallin leveyteen $0{,}80\ \mathrm{m}$ on $125\ \mathrm{m} : 0{,}80\ \mathrm{m} \approx 156$. Vastaava pituuksien suhde on $300\ \mathrm{m} : 1{,}80\ \mathrm{m} \approx 167$. Mallissa alkuperäinen kohde on pienennettävä vähintään suhteessa $1 : 167$. ”Sopiva” mittakaava voisi tässä tapauksessa olla $1 : 200$.

Yhdenmuotoisuuden käsite laajenee monikulmioista ympyröihin ja edelleen ympyrän sektoreihin ja segmentteihin. *Havaitse, että kaikki ympyrät ovat keskenään yhdenmuotoisia!* → Ympyrän kehän pituuden ja halkaisijan välinen suhde on tänäpäivänäkin π.

Sektorit ja segmentit ovat yhdenmuotoisia, kun niitä vastaavat keskuskulmat ovat yhtä suuret.



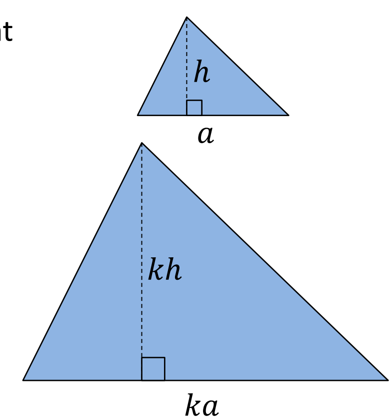
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde

Esimerkki Mikä on kolmioiden pinta-alojen suhde, kun kolmiot ovat yhdenmuotoiset mittakaavassa k?

Ratkaisu Olkoot kolmioiden kannat a ja ka sekä korkeudet h ja kh.
Tällöin pinta-alat ovat:

$$A_1 = \frac{1}{2}ha,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot kh \cdot ka = \frac{1}{2}k^2ha.$$



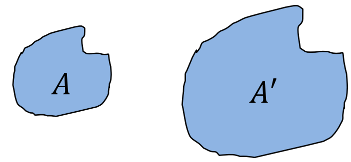
Pinta-alojen suhde

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{1}{2}k^2ha}{\frac{1}{2}ha} = k^2$$

on mittakaavan neliö. Näin ollen, koska monikulmiot voidaan jakaa osakolmioihin, niin keskenään yhdenmuotoisten monikulmioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Tämä pätee yleisesti.

Lause, Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde:
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A'}{A} = k^2, \qquad \text{missä } k \text{ on mittakaava}$$



Esimerkki **a)** Kuinka paljon on neliön sivua pidennettävä, jotta neliön pinta-ala kasvaisi kaksinkertaiseksi?
b) Kuinka moninkertaiseksi neliön pinta-ala tulee, jos sivun pituus kasvaa kymmenkertaiseksi?

Ratkaisu **a)** Pinta-alojen suhde on $2 : 1$, joten $k^2 = 2$, josta saadaan $k = \sqrt{2}$. Sivu on siis pidennettävä $\sqrt{2}$-kertaiseksi.

b) Mittakaava on $k = 10 : 1 = 10$, joten pinta-alojen suhde on $k^2 = 10^2 = 100$. Pinta-ala tulee näin ollen 100-kertaiseksi.

GEOMETRIA MAA3

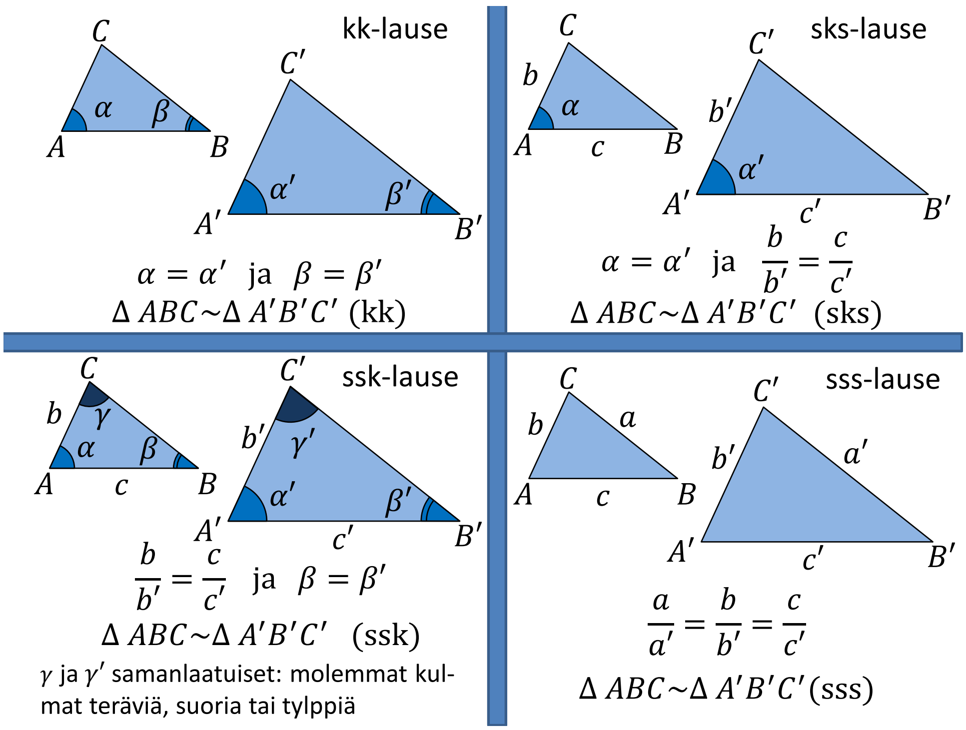
Kolmioiden yhdenmuotoisuus

Jokaista kolmioiden yhtenevyyslausetta vastaa kolmioiden yhdenmuotoisuuslause. Yhtenevyyslauseita ksk ja kks vastaa seuraava lause.

Lause, kk: Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuret kuin toisen kolmion kaksi kulmaa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

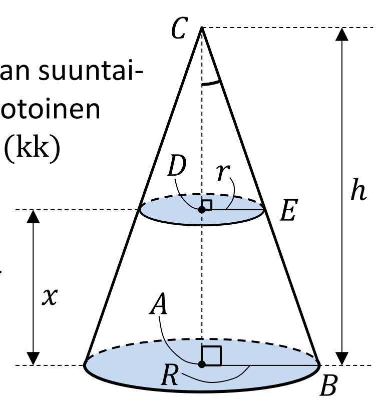
Kolmiot perustellaan yhdenmuotoisiksi useimmiten **kk** lausetta käyttäen. Yhdenmuotoisuuden voi myös perustella käyttämällä **sks**, **ssk**, **sss**, lauseita, joissa **k** tarkoittaa vastinkulmien yhtäsuuruutta ja **s** vastinsivujen pituuksien yhtä suuria suhteita (vastinsivujen verrannollisuutta).

Yhdenmuotoisuuslause	Yhtenevyyslause
kk	ksk kks
sks	sks
ssk	ssk
sss	sss



Esimerkiksi merkintä $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (sks) tarkoittaa sitä, että kolmiot ΔABC jaΔDEF on todettu yhdenmuotoisiksi sillä perusteella, että vastinsivuparien pituuksien suhde on sama ja sivujen väliset vastinkulmat ovat yhtä suuret.

Esimerkki Suoran ympyräkartion pohjan säde on $R = 10{,}0$ cm ja korkeus $h = 14{,}0$ cm. Miltä korkeudelta kartio pitää leikata pohjan suuntaisella tasolla, jotta saataisiin ympyräkartio, jonka pohjan säde $r = 7{,}0$ cm?



Kun suoraa ympyräkartiota leikataan pohjan suuntaisella tasolla, erottuu sen kanssa yhdenmuotoinen suoraympyräkartio. Tällöin $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ (kk) ja $\frac{R}{r} = \frac{h}{h-x}$, josta

$$x = \frac{hR - hr}{R} = \frac{14{,}0 \cdot 10{,}0 - 14{,}0 \cdot 7{,}0}{10{,}0}$$
$$= 4{,}2$$

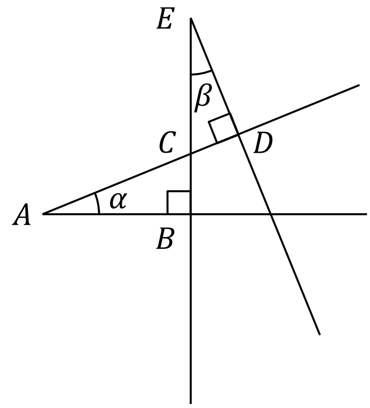
Kartio pitää leikata 4,2 cm:n korkeudelta pohjasta lukien.

Lauseen kk seurauksia

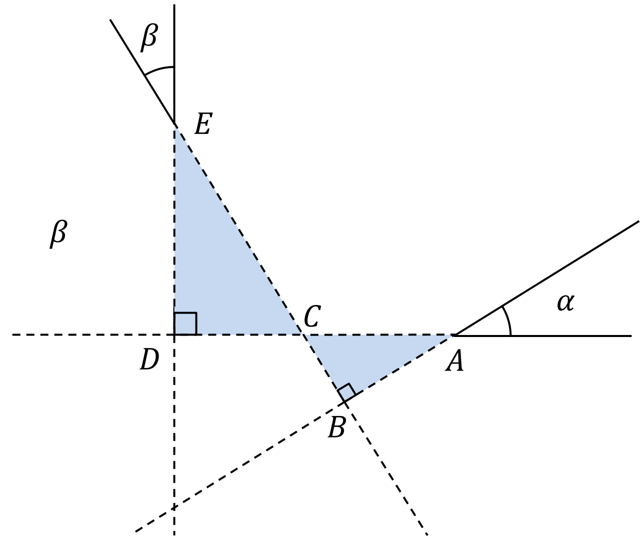
Lause 1 Jos kahden terävän kulman samannimiset kyljet tai niiden jatkeet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin kulmat ovat yhtä suuret.

Todistus Kulmat voivat sijaita monella eri tavalla toisiinsa nähden. Tarkastellaan tapauksia, joissa ensin kulmien molemmat kyljet leikkaavat ja sitten kylkien jatkeet leikkaavat. Muut tapaukset vastaavasti.

Tapaus 1 $\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (kk), sillä kumpikin kolmio on suorakulmainen (oletus) ja kolmioiden toiset terävät kulmat ovat ristikulmina yhtä suuret. Täten myös vastinkulmat α ja β ovat yhtä suuret.

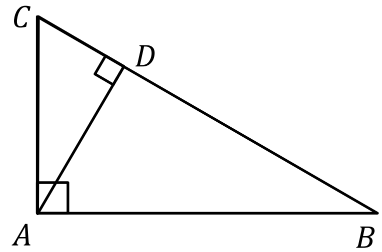


Tapaus 2 $\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (kk), sillä kumpikin kolmio on suorakulmainen ja kulmat $\sphericalangle ECD$ ja $\sphericalangle ACB$ ovat ristikulmina yhtä suuret. Koska kulmien α ja β ristikulmat ovat kolmioiden EDC ja ABC vastinkulmina yhtä suuret, ovat myös α ja β yhtä suuret.



Lause 2 Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa kolmion kahdeksi kolmioksi, jotka ovat yhdenmuotoisia sekä alkuperäisen kolmion kanssa että keskenään.

Todistus Tarkasteltavat kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla, sillä jokaisessa kolmiossa on suora kulma ja sen lisäksi jokin yhtä suurista kulmista $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle ABC$ tai $\sphericalangle CAD$ (samannimiset kyljet joko yhtyvät tai ovat kohtisuorassa).



$\Delta ACD \sim \Delta BAD \sim \Delta BCA$

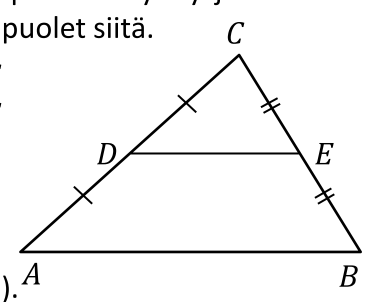
Kuvan merkintöjä käyttäen $\Delta ACD \sim \Delta BAD$, joten $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$. Tulos voidaan näin ollen esittää myös muodossa

Lause 3 Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusan vastainen korkeus on kateettien hypotenuusalla olevien projektioiden *geometrinen keskiarvo*

$$AD = \sqrt{BD \cdot DC}$$

Kolmion sivun suuntaiset leikkaajat

Lause 1 Kolmion kahden sivun keskipisteiden yhdysjana on kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaan puolet siitä.



Todistus Merkitään kolmion ΔABC sivun AC keskipistettä D:llä ja sivun BC keskipistettä E:llä. Koska

$$\frac{DC}{AC} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2}$$

ja $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ACB$, niin $\Delta DEC \sim \Delta ABC$ (sks).

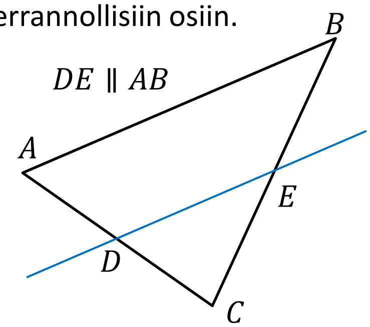
Tällöin myös $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CAB$, joten $DE \parallel AB$. Nyt yhdenmuotoisten kolmioiden ΔDEC ja ΔABC vastinsivujen suhde on sama, joten

$$\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad DE = \frac{1}{2}AB.$$

Lause 2 Kolmion yhden sivun suuntainen ja kahta muuta sivua leikkaava suora jakaa leikkaamansa sivut verrannollisiin osiin.

Todistus Leikatkoon kolmion ΔABC sivun AB suuntainen suora sivut AC ja BC pisteissä D ja E. Väitetty osien verrannollisuus voidaan ilmoittaa esimerkiksi verrantona

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}.$$



Koska $DE \parallel AB$, ovat kolmioiden ΔDEC ja ΔABC kulmat pareittain yhtä suuret, joten $\Delta DEC \sim \Delta ABC$ (kk). Tällöin

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AD + DC}{DC} = \frac{BE + EC}{EC}$$

eli

$$\frac{AD}{DC} + 1 = \frac{BE}{EC} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}.$$