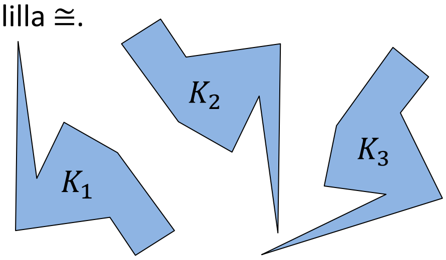
Yhtenevyys

Määritelmä, yhtenevyys:
Tasokuviota sanotaan *yhteneväksi* toisen tasokuvion kanssa silloin, kun kuviot ovat samankokoiset ja samanmuotoiset → jokaista toisen kuvion osaa vastaa samanlainen osa toisessa sen kanssa yhtenevässä kuviossa. Yhtenevyyttä merkitään symbolilla ≅.

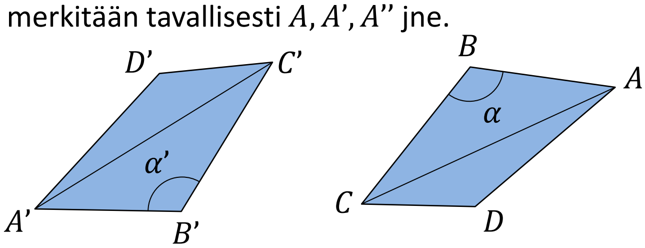
Esimerkki:
Kuviot K_1, K_2 ja K_3 ovat keskenään yhtenevät, $K_1 \cong K_2 \cong K_3$.

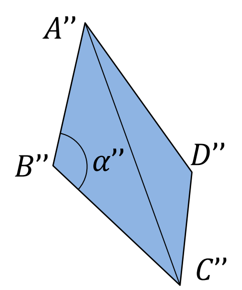


Tasokuvioiden yhtenevyys voitaisi sopia tarkoittavan sitä että kuviot päällekkäin asetettuina peittävät täysin toinen toisensa. Ajatuksena selkeä, mutta matemaattisena tarkasteluna kestämätön. Matemaattisen vastineen ”siirtämiselle päällekkäin” muodostavat *yhdensuuntaissiirrot, kierrot ja peilaukset*, jotka voidaan hyvin määritellä.

Kun yhtenevät kuviot asetetaan päällekkäin, niin että ne peittävät toisensa, päällekkäin osuvia osia (kulmat, sivut, pisteet, kaaret, jänteet, jne.) kutsutaan *vastinosiksi*. Esim. vastinsivut, vastinkulmat, jne. Yhtenevien kuvioiden kaikki vastinosat ovat keskenään yhtä suuria.

Esimerkki: Yhtenevien kuvioiden vastinosia, merkitään tavallisesti A, A', A'' jne.





Siis $AB = A'B' = A''B''$, $AC = A'C' = A''C''$ ja $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle A''B''C''$.

Kaksi kuviota ovat *suoraan yhteneviä*, jos ne saadaan päällekkäin pelkällä yhdensuuntaissiirrolla ja kierrolla. Sekä *kääntäen yhteneviä*, jos edellisten lisäksi tarvitaan peilausta, katso kirjan kuvat sivu 44.

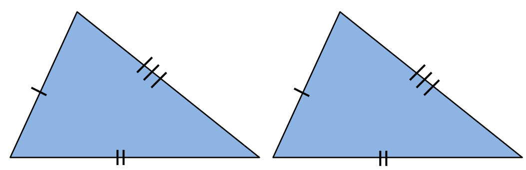
Lause, monikulmioiden yhtenevyys:
Monikulmiot ovat yhtenevät, jos niiden vastinsivut ja vastinkulmat ovat pareittain yhtä suuret.

Kolmioiden (ovat monikulmioita) tapauksissa pitäisi siis tutkia yhteensä kuusi vastinparia: 3 sivua ja 3 kulmaa. Kaikkia ei kuitenkaan tarvitse osoittaa, sillä kolmioille pätee ns. *kolmioiden yhtenevyyslauseet*. Kolmioiden yhtenevyys on tärkeää osata, sillä jokainen monikulmio voidaan jakaa kolmioihin.

Lause, kolmioiden yhtenevyyslauseet, 5 tapausta:

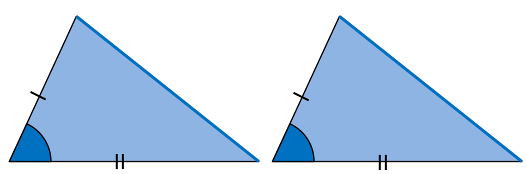
Tapaus 1: Lause sss
Jos kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät kuin vastinsivut toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.

sivu – sivu – sivu



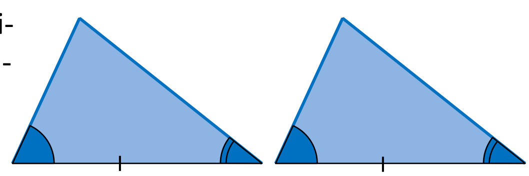
Tapaus 2: Lause sks
Jos kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.

sivu – kulma – sivu



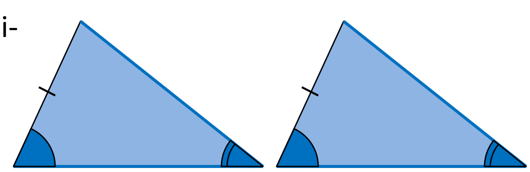
Tapaus 3: Lause ksk
Jos kolmion kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.

kulma – sivu – kulma



Tapaus 4: Lause kks
Jos kolmion kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.

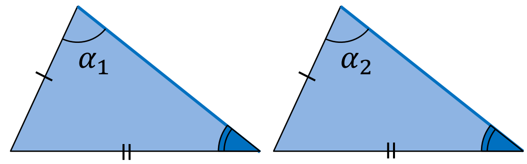
kulma – kulma – sivu



Tapaus 5: Lause ssk

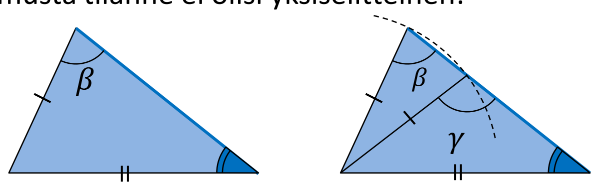
sivu – sivu – kulma

Jos kolmion kaksi sivua ja toisen vastainen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät, edellyttäen,



että toisten yhtä suurien sivujen vastaiset kulmat ovat samanlaiset, eli kuvassa α_1 ja α_2 ovat joko teräviä, suoria tai tylppiä.

Ilman lisävaatimusta tilanne ei olisi yksiselitteinen:



Yhtenevyyslauseita ei todisteta, mutta niitä käytetään, kun halutaan osoittaa vastinjanoja/-kulmia yhtä suuriksi.

Geometrinen todistaminen

Miksi pitää todistaa?

Todistus on looginen päättelyketju, jossa oletuksista, määritelmistä, aksioomeista sekä aiemmin todistetuista tuloksista lähtien päätellään väite. Todistus antaa perustelut väitteille ja jäsentää matemaattista tietoa. *”Ei olla ns. tuuliajolla, vaan selkeällä kurssilla kohti päämäärää.”*

Mikä on aksiooma?

Matemaattisen teorian rakentamisessa käytetään *aksiomaattista menetelmää*. Lähtökohtina ovat tietyt *peruskäsitteet (-objektit)* esimerkiksi piste ja suora, joita ei määritellä ja tietyt niitä koskevat väitteet eli aksioomat, jotka hyväksytään tosiksi ilman todistusta. Siis aksiooma on jokin väite, jota ei todisteta.

Perusobjektien avulla *määritellään* uusia käsitteitä ja niiden avulla edelleen uusia. Aksioomien ja määritelmien avulla *todistetaan lauseita eli teoreemoja*, joiden avulla todistetaan edelleen uusia lauseita.

Millainen on geometrinen todistustehtävä (tehtävän rakenne)?

Geometrinen lause ilmoittaa, että tietyillä edellytyksillä eli tietyn *ole-tuksen* ollessa voimassa tietty geometrinen ominaisuus on voimassa eli tietty *väite* (*väitös*) pitää paikkansa.
Lause voidaan aina esittää ”Jos…, niin…” – muodossa, jolloin *jos*-sanaa seuraa oletus ja *niin*-sanaa väite. Esimerkiksi lause: *”Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.”* voidaan esittää muodossa: *”**Jos** kolmion on tasakylkinen, **niin** sen kantakulmat ovat yhtä suuret.”*

Geometrinen todistustehtävän rakenne on siis seuraava:

LAUSE:	Tietyillä edellytyksillä on voimassa tietty geom.ominais.
OLETUS:	Ilmoitetaan lauseessa mainitut edellytykset ja otetaan käyttöön tarvittavat merkinnät.
VÄITE:	Ilmoitetaan lauseessa mainittu ominaisuus käyttämällä sopivia merkintöjä. (Oletukset ja väite usein valmiina.)
TODISTUS:	Osoitetaan väite oikeaksi käyttämällä hyväksi oletusta, määritelmiä ja aiemmin tunnettuja lauseita.
HUOM!	ÄLÄ lähde liikkeelle väitteestä.