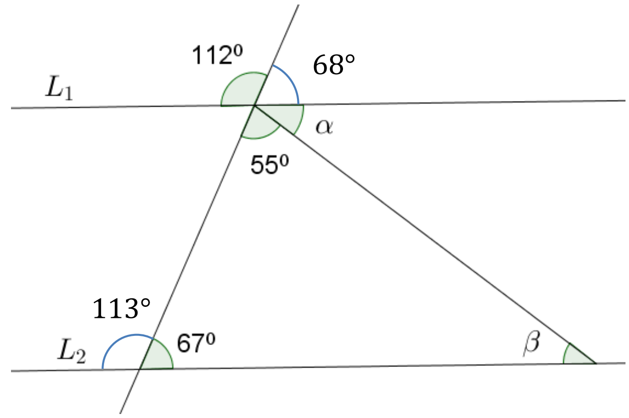
NIMI:

Osio A – VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN 1-2!

VASTAA TÄHÄN TEHTÄVÄPAPERIIN. LASKINTA EI SAA KÄYTTÄÄ, MAOL ON SALLITTU.

1. **a) Kuinka suuria kulmat α ja β ovat? Ovatko suorat L_1 ja L_2 yhdensuuntaiset? Muista perustella vastauksesi.**



Kahden suoran leikatessa muodostuvat ristikulmat ovat yhtä suuret, joten pätee

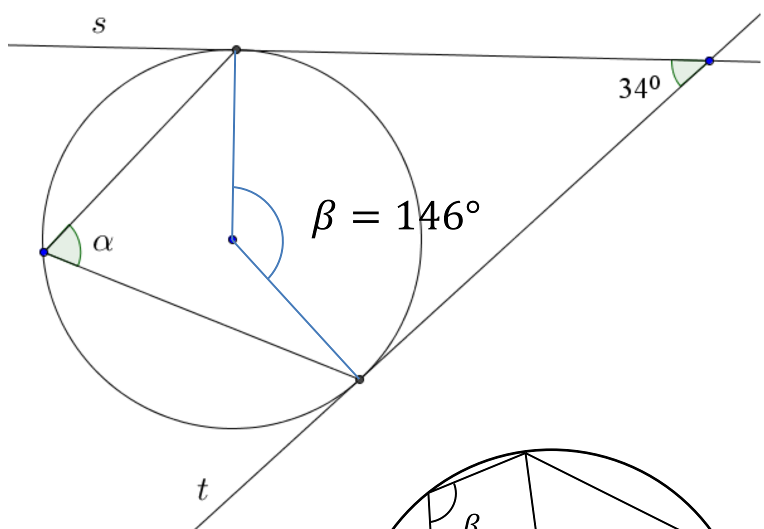
$$112° = 55° + \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 112° - 55° = 57°\,.$$

Toisaalta kolmion kulmien summa on 180° (euklidisessa geometriassa, ei esimerkiksi pallo tai hyperbolisessa geometriassa), joten

$$180° = 67° + 55° + \beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = 180 - 67° - 55° = 58°\,.$$

Suorat L_1 ja L_2 eivät ole yhdensuuntaisia koska samankohtaiset kulmat eivät ole yhtäsuuria, katso kuva yllä.

b) Kuviossa suorat s ja t ovat ympyrän tangentteja. Määritä kuvion kulma α. Perustele.



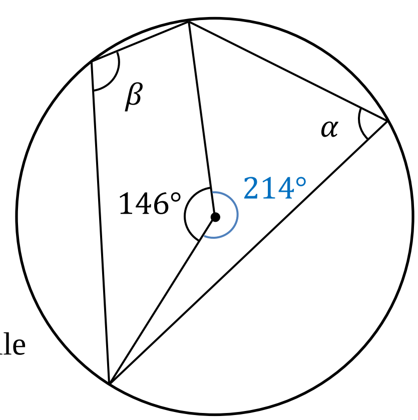
Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman summa on 180°, joten

$$\beta = 180° - 34° = 146°\,.$$

Koska keskuskulmaa vastaava kehäkulma on puolet keskuskulmasta niin saadaan

$$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{146°}{2} = 73°\,.$$

c) Määritä kuvion kulmien α ja β suuruudet. Perustele.



Kulmalle α ja keskuskulmalle 146° on sama kaari, joten $\alpha = \frac{146°}{2} = 73°$.

Kulman 146° eksplementtikulma on 214°, joten kulmalle β ja keskuskulmalle 214° on sama kaari, joten $\alpha = \frac{214°}{2} = 107°$.

2. a) Laske pallon tilavuus, kun sen pinta-ala on 16π.

a) Säteen kautta! Siis $A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2 = 16\pi$, joten

$$r = \sqrt{\frac{16\pi}{4\pi}} = \sqrt{4} = 2\,.$$

Näin ollen

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi\,.$$

b) Mitä eroa on käsitteillä yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus? Millä tavoin käsite *mittakaava* liittyy yhdenmuotoisuuteen, anna esimerkki (myös piirros riittävine merkintöineen kelpaa).

b) Määritelmä, yhtenevyys:

Tasokuviota sanotaan *yhteneväksi* toisen tasokuvion kanssa silloin, kun kuviot ovat samankokoiset ja samanmuotoiset → jokaista toisen kuvion osaa vastaa samanlainen osa toisessa sen kanssa yhtenevässä kuviossa. Yhtenevyyttä merkitään symbolilla $\cong$.

Määritelmä, yhdenmuotoisuus:

Monikulmio M_1 on *yhdenmuotoinen* monikulmion M_2 kanssa, merkitään $M_1 \sim M_2$, jos monikulmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivujen pituuksien suhteet ovat yhtä suuret, eli vastinsivut ovat verrannolliset

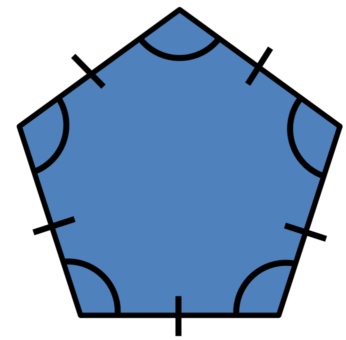
$$M_1 \sim M_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{a_1}{a'_1} = \dfrac{a_2}{a'_2} = \ \dots = \dfrac{a_n}{a'_n} \\ \alpha_1 = \alpha'_1,\ \alpha_2 = \alpha'_2,\ \dots, \alpha_n = \alpha'_n \end{cases}.$$

Yhdenmuotoisuutta merkitään symbolilla $\sim$. Yhdenmuotoisten monikulmioiden vastinsivujen pituuksien suhdetta kutsutaan *mittakaavaksi* k.

Huomaa, että yhdenmuotoisuus avaruudessa määritellään samoin kuin tasossa. Kaksi avaruuskuviota ovat yhdenmuotoisia, jos niiden vastinjanat ovat verrannolliset ja vastinkulmat ovat yhtä suuret. Lisäksi yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö (k^2) ja yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio (k^3).

Esimerkissä maininta vastinosien suhteesta toisiinsa.

c) Mitä tarkoitetaan *säännöllisellä* monikulmiolla. Anna esimerkki säännöllisestä monikulmiosta. Onko neljäkäs säännöllinen monikulmio?



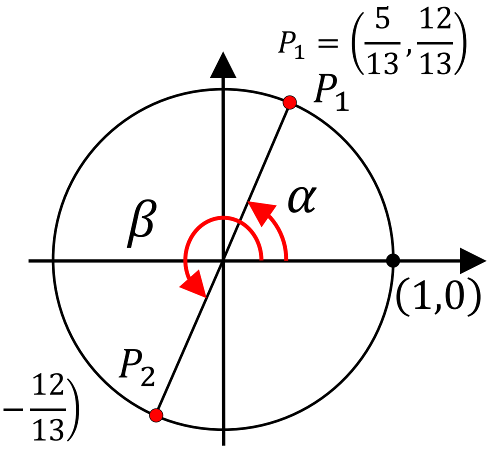
c) *Säännöllisessä* monikulmiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä (monikulmio on tasasivuinen) ja kaikki kulmat ovat yhtä suuria (monikulmio on tasakulmainen). Esimerkkinä säännöllinen viisikulmio. **Neljäkäs ei ole säännöllinen**, sillä kulmat eivät välttämättä ole yhtäsuuria.

3. a) Kolmion kaksi kulmaa ovat $41,2°$ ja $73,7°$ sekä lyhin sivu 29. Laske kolmion muut osat (eli kolmas kulma ja kahden sivun pituudet).

b) Laske kuvion (oikealla) tiedoilla

i) $\sin(180° - \beta) + \cos(-\alpha)$,

ii) $\sin(180° - \alpha) - \sin(\alpha - 180°) + \cos(180° - \alpha) + \cos\alpha$



a) Kolmion kolmas kulma on, merkitään γ, kuva alla,

$$\gamma = 180° - 41,2° - 73,7° = 65,1°.$$

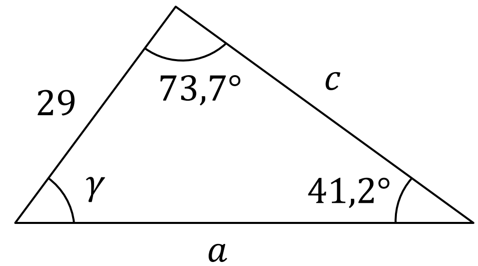
Pienimmän kulman $41,2°$ vastainen sivu on lyhin. Näin ollen sinilauseen nojalla on

$$\frac{29}{\sin 41,2°} = \frac{a}{\sin 73,7°} \quad \text{ja} \quad \frac{29}{\sin 41,2°} = \frac{c}{\sin 65,1°},$$

joten

$$a = \frac{29 \cdot \sin 73,7°}{\sin 41,2°} \approx 42,257\,17\ldots \approx 42,3 \quad \text{ja} \quad c = \frac{29 \cdot \sin 65,1°}{\sin 41,2°} \approx 39,934\,26\ldots \approx 39,9\,.$$

Kolmas kulma on $65,1°$ ja muut sivut ovat noin $42,3$ ja $39,9$.



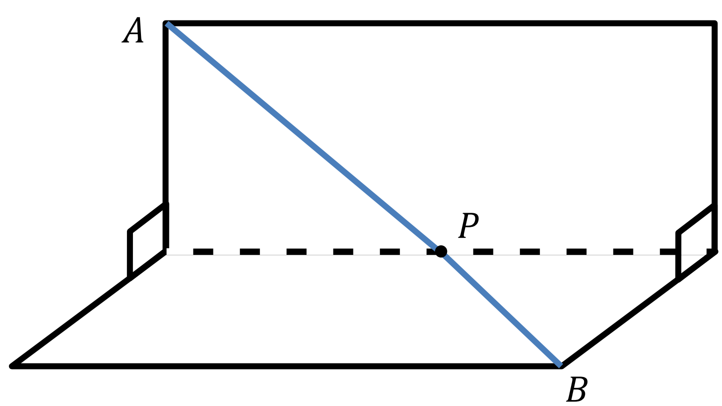
b) Koska suplementtikulmille pätee $\sin(180° - x) = \sin x$ ja $\cos(180° - x) = -\cos x$ ja koska vastakulmille pätee $\sin(-x) = -\sin x$ ja $\cos(-x) = \cos x$, niin saadaan

i) $\sin(180° - \beta) + \cos(-\alpha) = \sin\beta + \cos\alpha = -\frac{12}{13} + \frac{5}{13} = -\frac{7}{13} \approx -0{,}538\,461\ \ldots$

ii)
$$\sin(180° - \alpha) - \sin(\alpha - 180°) + \cos(180° - \alpha) + \cos\alpha$$
$$= \sin\alpha + \sin(180° - \alpha) - \cos\alpha + \cos\alpha$$
$$= 2\sin\alpha = 2 \cdot \frac{12}{13} = \frac{24}{13} \approx 1{,}846153\ \ldots$$

4. a) Ympyrä kehä pitenee 30 prosenttia. Kuinka monta prosenttia kasvaa tällöin ympyrän pinta-ala?

b) A4-arkki on taitettu keskeltä niin, että taitokset ovat toisiaan kohtisuorassa (katso kuva). Kuinka suuri on lävistäjien puolikkaiden PA ja PB välinen kulma? A4-arkin mitat ovat senttimetrin tarkkuudella 21 cm ja 30 cm.

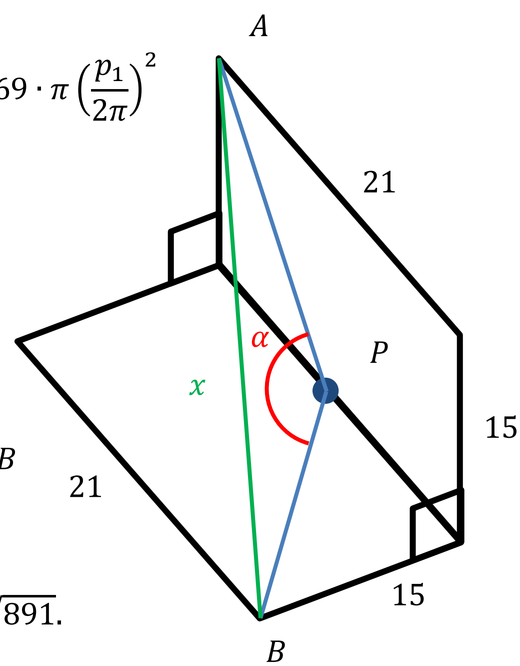


a) Merkitään alkuperäisen ympyrän kehän pituutta p_1:llä. Tällöin vastaava pinta-ala $A_1 = \pi\left(\frac{p_1}{2\pi}\right)^2$. Nyt uusi kehän pituus on $p_2 = 1{,}3 \cdot p_1$. Tällöin uusi pinta-ala on

$$A_2 = \pi\left(\frac{p_2}{2\pi}\right)^2 = \pi\left(\frac{1{,}3 \cdot p_1}{2\pi}\right)^2 = 1{,}69 \cdot \pi\left(\frac{p_1}{2\pi}\right)^2$$

Eli pinta-ala kasvoi $\frac{A_2}{A_1} = 1{,}69 \rightarrow 69$ %:lla.

b) KUVA + merkinnät



Lävistäjä $AB = \sqrt{30^2 + 21^2} = \sqrt{1341}$, josta puolikas

$$\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{1341}}{2} = AP = PB$$

Avaruuslävistäjäksi x saadaan

$$x = \sqrt{15^2 + 15^2 + 21^2} = \sqrt{891}.$$

Näin ollen kosinilausetta käyttäen kulmaksi α saadaan

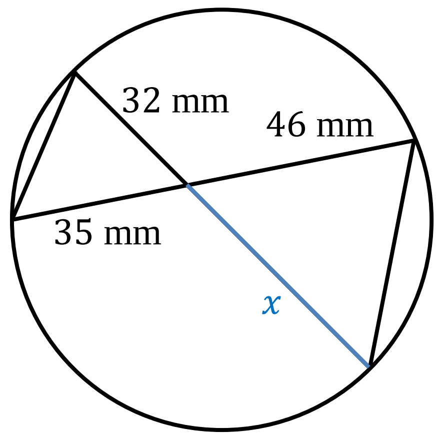
$$\cos\alpha = \frac{AP^2 + PB^2 - AB^2}{2 \cdot AP \cdot PB} = \frac{\frac{1341}{4} + \frac{1341}{4} - 891}{2 \cdot \frac{\sqrt{1341}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1341}}{2}} = \frac{-220{,}5}{\frac{1341}{2}} = -0{,}328\ldots$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha = 109{,}199\ldots° \approx 109°\,.$$

5. a) Pekka lähti suunnistuskisoissa 1350 m päässä olevalle rastille suuntaan, joka poikkesi $4°$ rastin suunnasta. Kuinka kaukana rastista Pekka oli juostuaan suoraan 1350 m?

b) Ympyrän halkaisija on 26 cm. Ympyrään on piirretty segmentti, jota vastaava kaari on 18 cm. Laske $A_{\text{segmentti}}$.

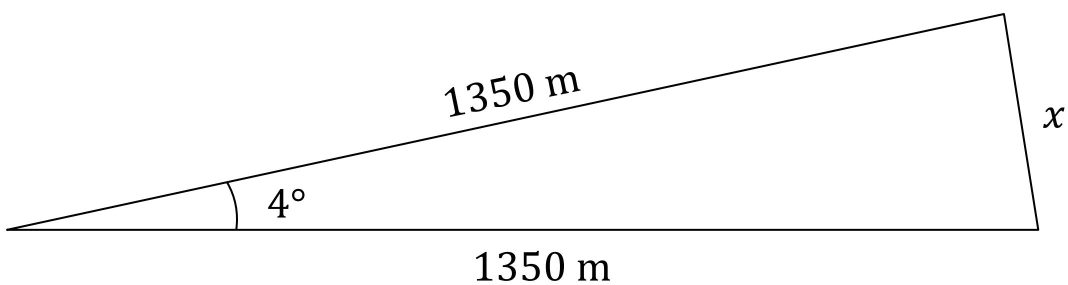
c) Määritä janan x pituus. Perustele.



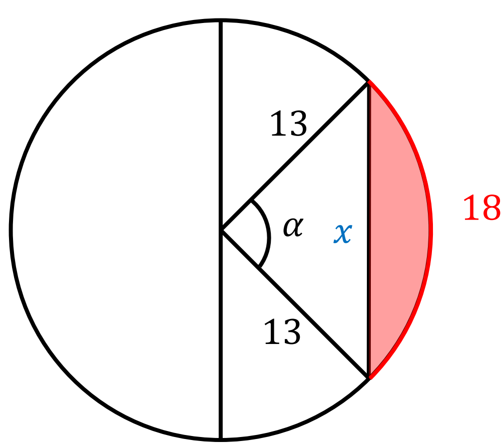
a) Hyödynnetään kosinilausetta, katso kuva. Saadaan

$$\begin{aligned} x^2 &= (1350\text{ m})^2 + (1350\text{ m})^2 - 2 \cdot 1350\text{ m} \cdot 1350\text{ m} \cdot \cos 4° \\ &= 2 \cdot (1350\text{ m})^2 - 2 \cdot (1350\text{ m})^2 \cdot \cos 4° \\ &= 2 \cdot (1350\text{ m})^2 \cdot (1 - \cos 4°) \\ &= 8879{,}036\ldots\text{m}^2, \end{aligned}$$

joten $x = 94{,}22864\ldots\text{m} \approx 94$ m.



b) KUVA + merkinnät.



Keskuskulmaksi α saadaan:

$$\alpha = \frac{360° \cdot 18\text{ cm}}{2 \cdot \pi \cdot 13\text{ cm}} = 79{,}336\ldots°$$

Kolmion pinta-ala (tai kosinilauseesta x:n pituus jne...)

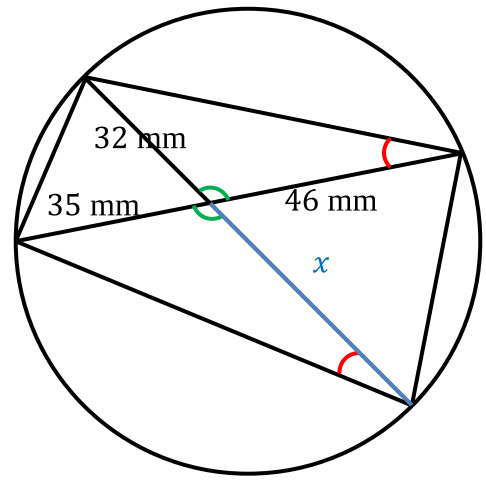
$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2} \cdot 13\text{ cm} \cdot 13\text{ cm} \cdot \sin 79{,}336\ldots° = 83{,}0396\ldots\text{cm}^2\ .$$

Lopuksi

$$A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} = \frac{79{,}336\ldots°}{360°} \cdot \pi \cdot (13\text{ cm})^2 - 83{,}039\ldots\text{cm}^2 = 33{,}960\ldots\text{cm}^2 \approx 34\text{ cm}^2\ .$$

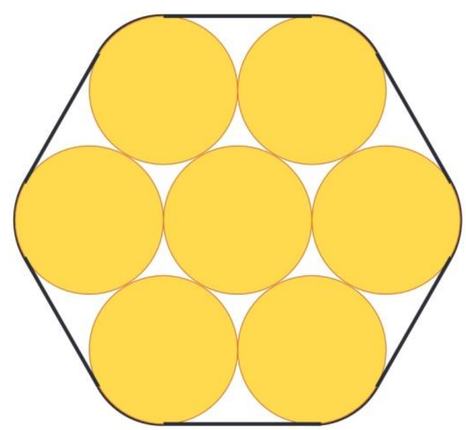
c) Kyseessä on ns. pisteen potenssi –tilanne: Muodostuu kaksi yhdenmuotoista kolmiota (katso kuva). Näin ollen pätee

$$\frac{x}{46} = \frac{35}{32} \quad \Longrightarrow \quad x = 50{,}3125 \approx 50{,}3\text{ mm}.$$



6. a) Kolmion ABC sivun BC pituus on 10. Laske kolmion muut sivut, kun kulman A puolittaja jakaa vastaisen sivun suhteessa $3:4$ ja kolmion piiri on 25. Piirrä/Hahmota tilanteesta kuva ja liitä se vastaukseesi.

b) Seitsemän mäntytukkia sidotaan vaijerilla alla olevan poikkileikkauskuvion mukaisesti. Kuinka paljon vaijeria tarvitaan yhteen kierrokseen? Jokaisen tukin halkaisija on 20 cm. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella. [YO k14/7]



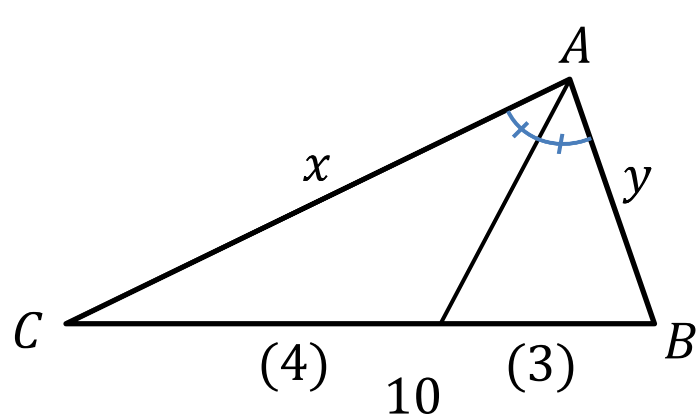
a) KUVA + merkinnät.

Koska kulmanpuolittaja, niin pätee $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, ja toisaalta piiri 25, joten $x = 25 - 10 - y = 15 - y$.

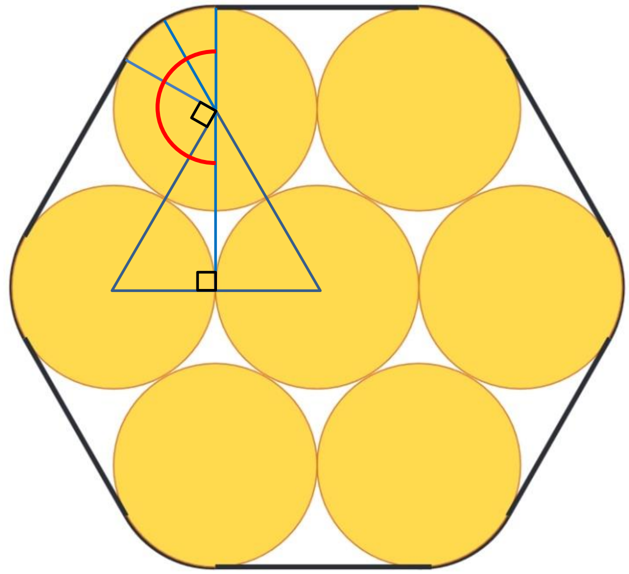
Saadaan

$$\frac{15 - y}{y} = \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad y = 6\frac{3}{7}$$

ja siis $x = 15 - 6\frac{3}{7} = 8\frac{4}{7}$.



b) Kaareva osa on $1/6$ –osa koko kierroksesta (havainto, joka pitää perustella jotenkin)



Perustelut: Tukkien keskipisteet yhdistäen muodostuu tasasivuinen kolmio, jonka kulmat ovat täten 60 astetta. Tasasivuisen kolmion yksi sivu on köyden suoran osan kanssa yhdensuuntainen (tätähän voisi perustella tarkemminkin). Lisäksi muodostuu oikokulma (punaisella). Näin ollen kaarevan osan vastaava keskuskulma on

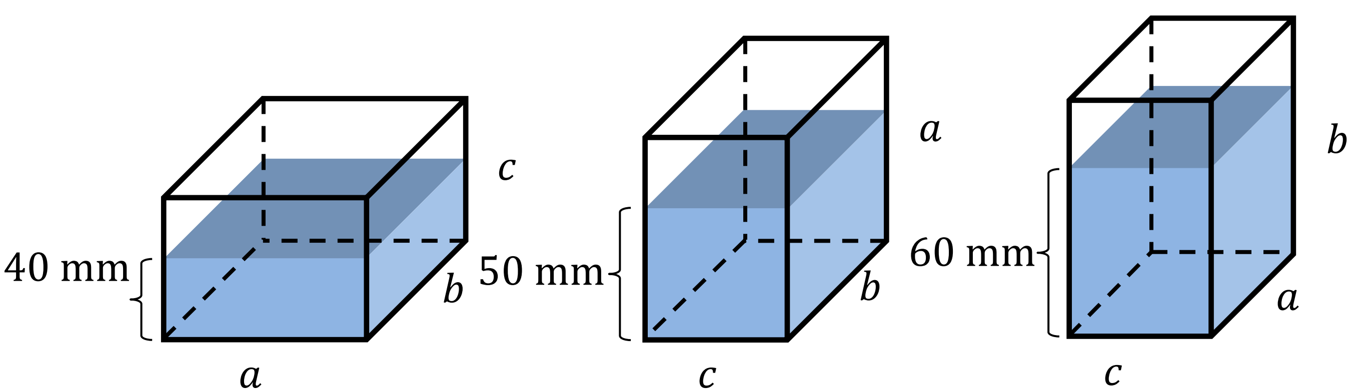
$$180° - 30° - 90 = 60°\,.$$

Kaarevat osat yhteensä muodostavat yhden täyden kierroksen ja suorat osat ovat tukkien keskipisteiden välinen etäisyys, eli tukkien halkaisijan mitta. Näin ollen köyden pituus on

$$d = 2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm} + 6 \cdot 20 \text{ cm} = (6 + \pi) \cdot 20 \text{ cm} = 182{,}831 \ldots \text{cm} \approx 183 \text{ cm}.$$

7. Suorakulmaisen särmiön muotoisessa suljetussa lasisäiliössä on $1{,}20$ litraa vettä. Vaakasuoralla alustalla mitattuna vedenkorkeus on 40 mm. Kun säiliö käännetään kyljelleen, on vedenkorkeus 50 mm, ja kun säiliö käännetään toiselle kyljelleen, on vedenkorkeus 60 mm. Määritä säiliön tilavuus.

Merkitään a, b, c (pituus, leveys, korkeus), jolloin annetuista tiedoista voidaan muodostaa yhtälö-ryhmä (katso myös kuvat) koska veden tilavuus pysyy vakiona $V_{\text{vesi}} = 1{,}2$ l.



$$V_{\text{vesi}} = a \cdot b \cdot 0{,}4 \text{ dm}, \qquad V_{\text{vesi}} = c \cdot b \cdot 0{,}5 \text{ dm}, \qquad V_{\text{vesi}} = c \cdot a \cdot 0{,}6 \text{ dm}$$

Ratkaistaan kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä mitä on a ilmoitettuna c:n avulla, eli eliminoidaan b.

$$\begin{cases} V_{\text{vesi}} = a \cdot b \cdot 0{,}4 \text{ dm} \\ V_{\text{vesi}} = c \cdot b \cdot 0{,}5 \text{ dm} \end{cases} \implies \quad a \cdot b \cdot 0{,}4 \text{ dm} = c \cdot b \cdot 0{,}5 \text{ dm} \quad \implies \quad a = \frac{c \cdot 0{,}5 \text{ dm}}{0{,}4 \text{ dm}} = 1{,}25 \cdot c.$$

Sijoitetaan näin saatu tieto oikeanpuoleisimpaan yhtälöön ja ratkaistaan mitä on c

$$V_{\text{vesi}} = 1{,}2 \text{ dm}^3 = c \cdot a \cdot 0{,}6 \text{ dm} = c \cdot \overbrace{1{,}25 \cdot c}^{=a} \cdot 0{,}6 \text{ dm}$$

$$\implies \quad c^2 = \frac{1{,}2 \text{ dm}^3}{1{,}25 \cdot 0{,}6 \text{ dm}} = 1{,}6 \text{ dm}^2$$

$$\implies \quad c = \sqrt{1{,}6 \text{ dm}^2} = 1{,}26491 \ldots \text{dm} \approx 1{,}265 \text{ dm}.$$

Nyt voidaan laskea a ja b, saadaan

$$a = 1{,}25 \cdot c = 1{,}25 \cdot 12{,}6491 \ldots \text{dm} = 1{,}581 \ldots \text{ dm} \approx 1{,}581 \text{ dm},$$

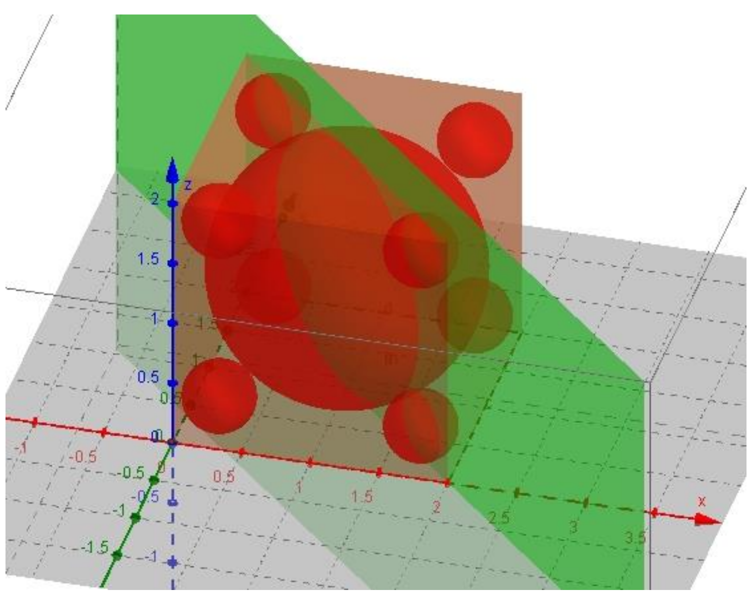
$$b = \frac{1{,}2 \text{ dm}^3}{1{,}581 \ldots \text{ dm} \cdot 0{,}4 \text{ dm}} = 1{,}8793 \ldots \text{dm} \approx 1{,}879 \text{ dm}.$$

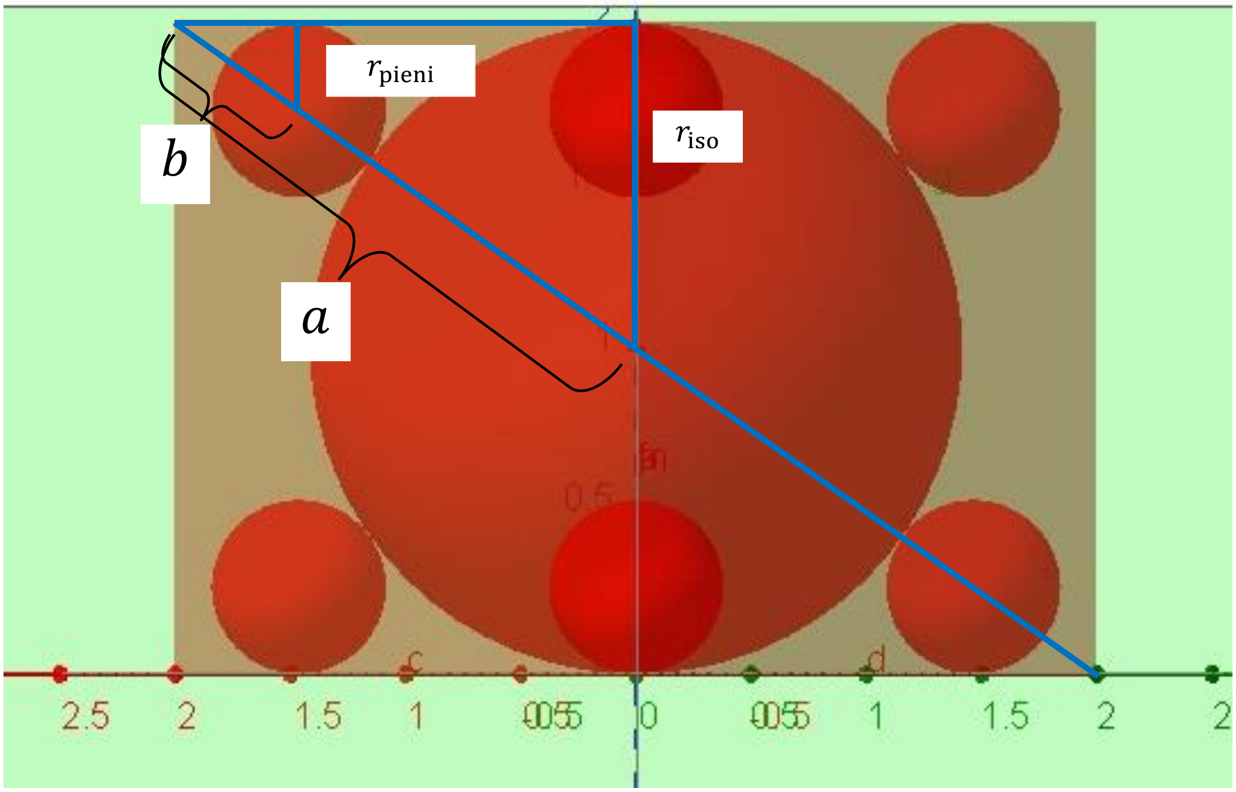
Säiliön tilavuus

$$V_{\text{säiliö}} = abc = 3{,}794 \ldots \text{ dm}^3 \approx 3{,}8 \text{ l}.$$

8. Kuutiossa on yhdeksän palloa siten, että suurin niistä sivuaa kuution kaikkia tahkoja ja loput kahdeksan pienmpää palloa kuution kolmea tahkoa ja isoa palloa. Kuinka monta prosenttia pallot täyttävät kuution tilavuudesta? Muista perustella! Pelkät tilavuudet suoraan geogebrasta katsottuna antaa 0 p. Hyödynnä aineistot-osiosta löytyvää GeoGebra-tiedostoa "tehtava8.ggb". (6 p)

Piirretään kuvia tilanteesta:





Olkoon kuution särmän pituus x. Tällöin ison pallon säde $r_{\text{iso}} = \frac{x}{2}$. Avaruuslävistäjä $d = \sqrt{3}x$, josta puolikas on kuvassa näkyvä $a = \frac{\sqrt{3}x}{2}$. Toisaalta b on sellaisen kuution avaruuslävistäjä, jonka särmä on r_{pieni}. Joten $b = \sqrt{3} \cdot r_{\text{pieni}}$. Tästä muodostuu yhtälö

$$a = r_{\text{iso}} + r_{\text{pieni}} + b$$

$$\frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{x}{2} + r_{\text{pieni}} + \sqrt{3} \cdot r_{\text{pieni}}$$

$$\sqrt{3}x = x + 2\left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot r_{\text{pieni}}$$

$$r_{\text{pieni}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)} \cdot x$$

Nyt voidaan laske pallojen yhteinen tilavuus

$$V_{\text{pienet pallot}} = 8 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)} \cdot x\right)^3\right) = \frac{104 - 60\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \cdot x^3$$

$$V_{\text{iso pallo}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot x^3$$

ja kuution tilavuus tulee suoraan $V_{\text{kuutio}} = x^3$

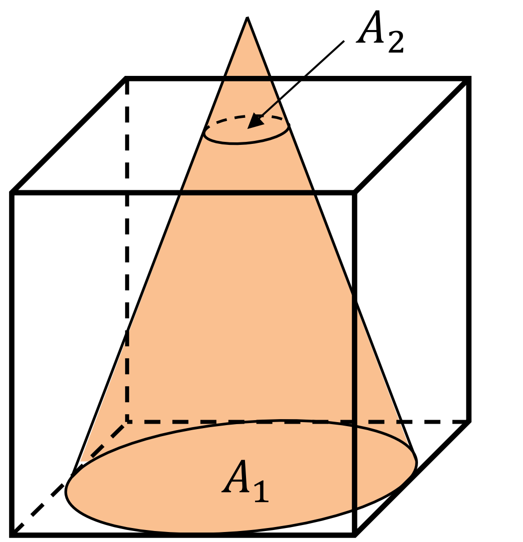
Prosenttiosuus on siten:

$$\frac{V_{\text{iso pallo}} + V_{\text{pienet pallot}}}{V_{\text{kuutio}}} = \frac{\left(\frac{104 - 60\sqrt{3}}{3} \cdot \pi + \frac{1}{6} \cdot \pi\right) \cdot x^3}{x^3} = \frac{209 - 120\sqrt{3}}{6} \cdot \pi \approx 0{,}604\,182\ldots$$

Eli noin 60,4 %.

9. Suoran ympyräkartion pohjana on kuution pohjaneliöön piirretty ympyrä. Kartio leikkaa kuution vastakkaisen tahkon pitkin ympyrää, jonka ala on kolmasosa pohjaympyrän alasta. Laske kartion tilavuuden ja kuution tilavuuden suhde, anna tarkka arvo ei likiarvoa. (YO-K91/5)

Muista perustella! Pelkät tilavuudet suoraan geogebrasta katsottuna antaa 0 p. Hyödynnä aineistot-osiosta löytyvää GeoGebra-tiedostoa "tehtava9.ggb". (6 p)



Piirretään kuva tilanteesta. Tiedetään, että pinta-aloille pätee:

$$A_2 = \frac{1}{3} A_1 \,.$$

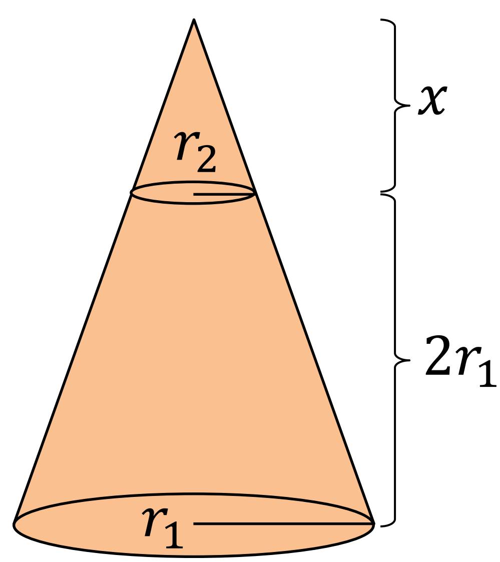
Ympyröiden säteet

$$A_2 = \pi {r_2}^2 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \pm\sqrt{\frac{A_2}{\pi}} \overset{\substack{\text{hyväks.} \\ \text{vain pos.}}}{=} \sqrt{\frac{A_1}{3\pi}}$$

$$A_1 = \pi {r_1}^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \pm\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}$$

Toisaalta koska kuutio → sen korkeus on $2r_1$, joten muodostuvista yhdenmuotoisista ympyräkartioista saadaan:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2r_1 + x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x r_1 = 2r_1 r_2 + x r_2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$



Näin ollen (ison) kartion korkeus, katso myös kuva oik. :

$$h = 2r_1 + x = 2r_1 + \frac{2r_1 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{2{r_1}^2 - 2r_1 r_2 + 2r_1 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{2{r_1}^2}{r_1 - r_2}$$

Tarvittavat tiedot tilavuuksien laskemiseksi on kasassa, joten

$$\Rightarrow \quad V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot \frac{2{r_1}^2}{r_1 - r_2} = \frac{\pi {r_1}^2 \cdot 2{r_1}^2}{3(r_1 - r_2)} = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{{r_1}^4}{r_1 - r_2}$$

$$\Longrightarrow \quad V_{\text{kuutio}} = (2r_1)^3 = 8{r_1}^3$$

Tilavuuksien suhteelle saadaan:

$$\frac{V_{\text{kartio}}}{V_{\text{kuutio}}} = \frac{\frac{2}{3}\pi \cdot \frac{{r_1}^4}{r_1 - r_2}}{8{r_1}^3} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{r_1}{r_1 - r_2} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}}{\sqrt{\frac{A_1}{\pi}} - \sqrt{\frac{A_1}{3\pi}}} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3 - \sqrt{3}} \overset{\substack{\text{lavennetaan} \\ 3+\sqrt{3}\text{:lla}}}{\widehat{=}} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3^2 - 3} = \frac{\pi}{24} \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)$$