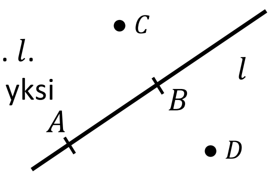
Geometrian perusobjekteja ja suureita

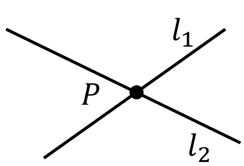
Piste ja suora: Piste, suora ja taso ovat geometrian peruskäsitteitä, joita ei määritellä. Voidaan ajatella, että kaikki geometriset kuviot koostuvat pisteistä.

Pistettä merkitään ●,× tai suoralla olevaa pistettä poikkiviivalla —+— . Pisteet nimetään isoilla kirjaimilla. HUOM! Pisteellä ei ole ulottuvuutta (pinta-alaa). Oleellista on, että *piste määrää paikan* suoralla, tasossa tai avaruudessa (3-,4-,n-ulotteinen).

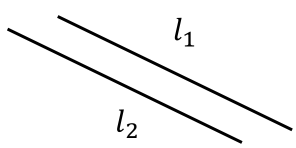
Suoraa merkitään pienellä kaunokirjaimella, esim. l. Kahden pisteen kautta voidaan piirtää yksi ja vain yksi Suora → Kaksi pistettä määräävät suoran! Suora voidaan siis merkitä joko suora AB tai suora l.



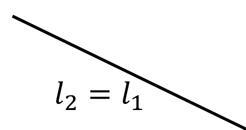
Kaksi suoraa ovat joko *erisuuntaiset*, merkitään $l_1 \nparallel l_2$, jolloin ne leikkaavat *leikkauspisteessä* P, tai *yhdensuuntaiset*, merkitään $l_1 \parallel l_2$. Yhdensuuntaiset suorat voivat yhtyä, eli ovat samat, tai olla erilliset.



$l_1 \nparallel l_2$, leikkauspiste P

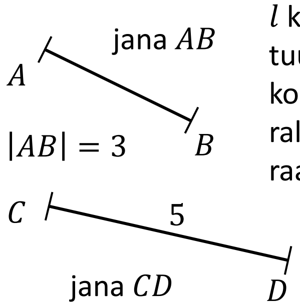


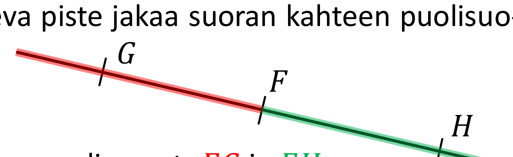
$l_1 \parallel l_2$, ei leikkauspisteitä



$l_1 \parallel l_2$, suorat yhtyvät

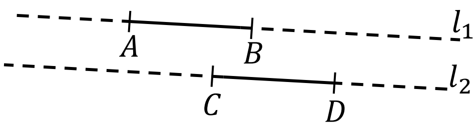
Jana ja puolisuora: Kahden pisteen A ja B erottamaa osaa suorasta l kutsutaan janaksi, merkitään AB. Janan AB pituutta merkitään $|AB| = AB$. Esim. $CD = 5$ tarkoittaa, että janan CD pituus on 5 yksikköä.Suoralla oleva piste jakaa suoran kahteen puolisuoraan



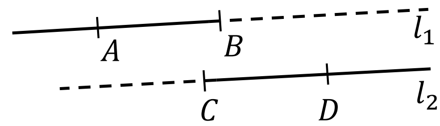


puolisuorat: FG ja FH

Huomautus **a)** Janat ja vastaavasti puolisuorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden määräämät suorat ovat yhdensuuntaisia.

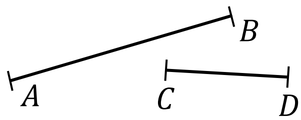


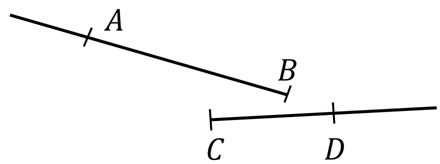
$AB \parallel CD$, kun $l_1 \parallel l_2$



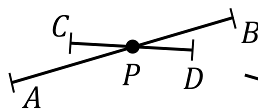
$AB \parallel CD$, kun $l_1 \parallel l_2$

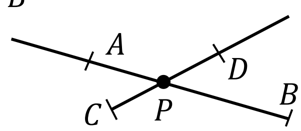
b) Erisuuntaiset janat ja vastaavasti erisuuntaiset puolisuorat eivät välttämättä leikkaa toisiaan.





c) Janojen/puolisuorien leikkauspiste kuuluu kummallekin janalle/puolisuoralle.





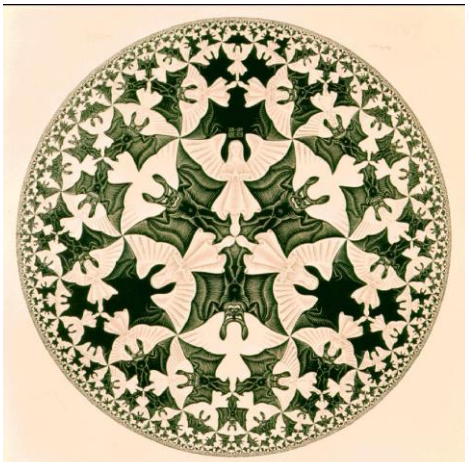
Yleisesti kuvioita, joiden kaikki pisteet ovat samassa tasossa kutsutaan kaksiulotteisiksi kuvioiksi eli *tasokuvioiksi*. HUOM! Kyseinen taso, jossa tasokuvio on, voi sijaita 3-,4- tai n-ulotteisessa avaruudessa. Tasokuvioita ovat: piste, suora, jana, puolisuora, monikulmio ja ympyrä. Tasokuvioita käsittelevä geometria on *tasogeometriaa*.

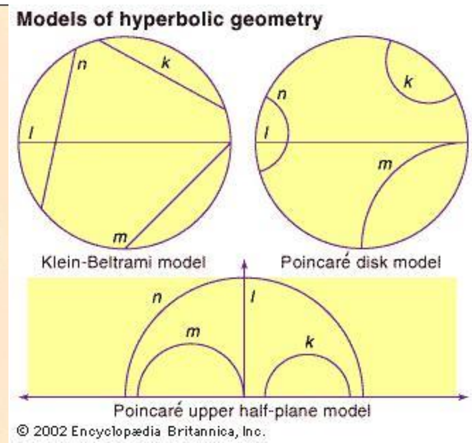
Geometrian synty aksiomaattisessa mielessä ajoittuu antiikin aikaan. Aksiooma on eräänlainen perustotuus. Ne ovat tiettyihin peruskäsitteisiin (esim. on olemassa piste) liittyviä tai peruskäsitteitä koskevia väitteitä, joita ei todisteta.

Lukiogeometria on ns. *euklidista geometriaa*, joka sisältää seuraavat alkuolettamukset:

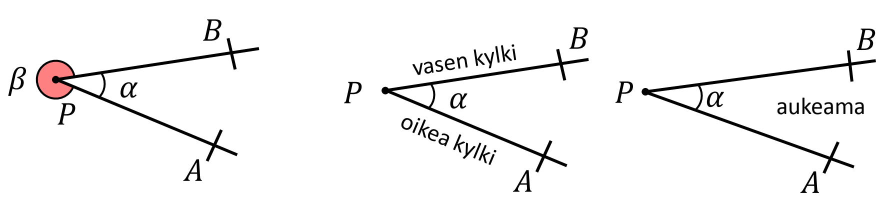
1. Kaksi pistettä määräävät janan.
2. Jana voidaan jatkaa suoraksi.
3. Annettu piste keskipisteenä voidaan piirtää ympyrä minkä tahansa pisteen kautta.
4. Kaikki suorat kulmat ovat samanlaisia.
5. (PA) Suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee tarkalleen yksi tämän suoran suuntainen suora.

Lähes 2000 vuotta ajateltiin, että 5. kohta voidaan johtaa 4. ensimmäisestä kohdasta, kunnes 1800-alkupuolella löydettiin epäeuklidinen eli hyperbolinen geometria. Tässä geometriassa 4. ensimmäistä kohtaa ovat voimassa mutta 5. kohta ei.



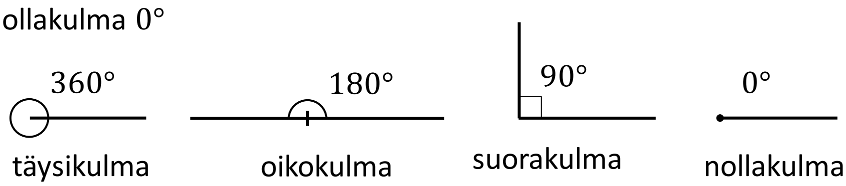


Kulmat: Kulma on kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajaama tason osa. Kulmalla on *kärki*, *kyljet* (oik. ja vas.) ja *aukeama*. Kulmalle on eri merkintöjä, katso kuvat alla. Tekstin seassa käytetään merkintöjä: $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle P$ tai $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.



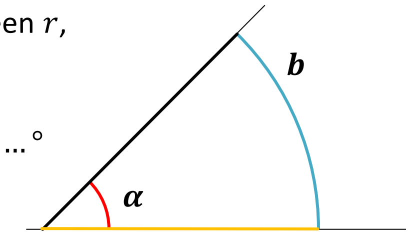
$\sphericalangle APB$ eli $\sphericalangle P$ on joko α tai β

Erityiskulmia: täysikulma $360°$, oikokulma $180°$, suorakulma $90°$ ja nollakulma $0°$



Kulman suuruus ilmoitetaan usein asteina. Luonnontieteissä ja lukiossa kurssin 9. jälkeen radiaaneina. Syy: radiaani on absoluuttinen kulman yksikkö, se on jokin reaaliluku. Määritelmän mukaan radiaani on kaaren pituuden b suhde säteen pituuteen r,

$$\alpha = \frac{b}{r}.$$



Lisäksi $\alpha = \frac{b}{r} = \frac{r}{r} = 1(\mathrm{rad}) \widehat{=}\ 57{,}2957\ldots°$

Radiaanien ja asteiden perussuhteet:

$$\begin{cases} 90° \widehat{=} \pi/2\ (\mathrm{rad}) \\ 180° \widehat{=} \pi\ (\mathrm{rad}) \\ 360° \widehat{=} 2\pi\ (\mathrm{rad}) \end{cases}$$

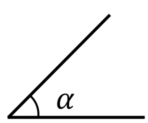
Muita harvempia kulman yksiköitä ovat piirut ja goonit eli graadit eli uusasteet.

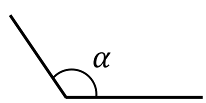
Ilmailu käyttää asteiden lisäksi minuutteja ja sekunteja, esim.

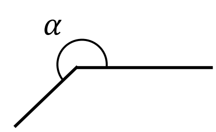
$$\alpha = 57°\ 23'\ 45''\ .$$

Lopuksi

a) Kulmien luokittelua: Huomaa avoimet välit







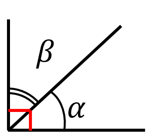
Kulma on **terävä**, kun $0° < \alpha < 90°$

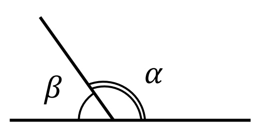
Kulma on **tylppä**, kun $90° < \alpha < 180°$

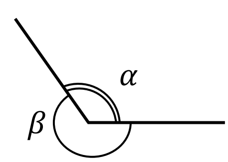
Kulma on **kupera**, kun $180° < \alpha < 360°$

Kulma on **kovera**, kun $0° < \alpha < 180°$

b) Kulmien nimityksiä: Kulmia α ja β kutsutaan







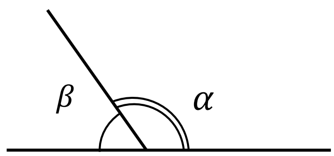
komplementtikulmiksi, jos $\alpha + \beta = 90°$

suplementtikulmiksi, jos $\alpha + \beta = 180°$

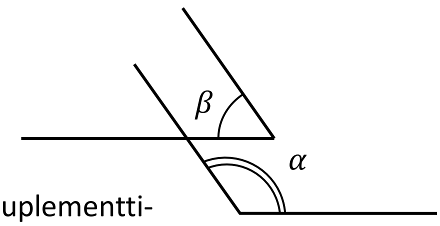
eksplementtikulmiksi, jos $\alpha + \beta = 360°$

Vieruskulmat ja ristikulmat:

Kahden kulman α ja β, joiden toiset kyljet yhtyvät ja joiden summa on oikokulma, eli $\alpha + \beta = 180°$, ovat toistensa *vieruskulmia*. Näin ollen vieruskulmat ovat toistensa suplementtikulmia.
Käänteinen ei pidä paikkaa, eli suplementtikulmat eivät välttämättä ole vieruskulmia.



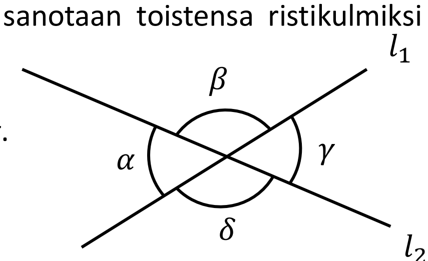
Vieruskulmat α ja β



Suplementti-
kulmat α ja β, jotka eivät ole vieruskulmia

Kahden suoran l_1 ja l_2 leikatessa toisensa syntyy 4 kulmaa α, β, γ ja δ. Havaitaan, että α, β ovat toistensa vieruskulmia, eli $\alpha = 180° - \beta$. Toisaalta myös γ, β ovat toistensa vieruskulmia, eli $\gamma = 180° - \beta$. Siis $\alpha = \gamma$. Näin ollen kulmia α ja γ sanotaan toistensa ristikulmiksi ja niille pätee tulos:

Ristikulmat ovat yhtäsuuret.

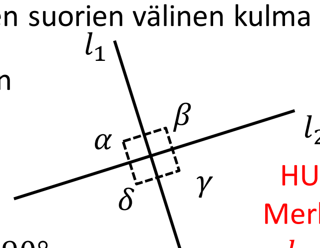


Suorien l_1 ja l_2 välinen kulma on pienin kulmista α, β, γ ja δ, yllä olevassa kuvassa $\alpha = \gamma$. Yhdensuuntaisten suorien välinen kulma on 0°.

Jos suorien välisistä kulmista yksikin on suora, niin kaikki muutkin kulmat ovat suoria. Syy; jos $\alpha = 90°$ niin

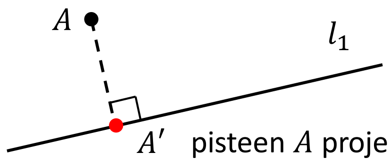
$$\beta = 180° - \alpha = 90°.$$

Ristikulmina $\gamma = \alpha = 90°$ ja $\delta = \beta = 90°$.

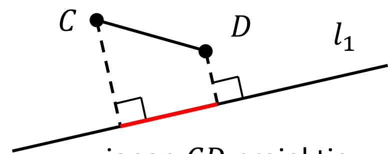


HUOM!
Merkitään
$l_1 \perp l_2$

Suorat, joiden välinen kulma on suora, ovat toisillensa *normaaleja*. Kun projisoidaan piste tai vastaavasti jana annetulle suoralle, niin projektiopiste/-jana löytyy suoran ja pisteen/janan päätepisteiden kautta kulkevan normaalin leikkauskohdasta/välistä, katso kuvat alla.



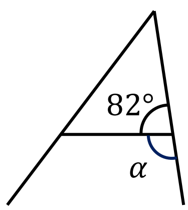
pisteen A projektio



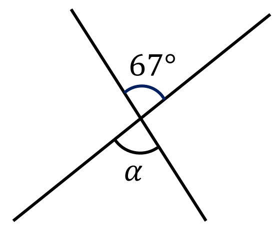
janan CD projektio

Esimerkki: Määritä kulman α suuruus

a)



b)



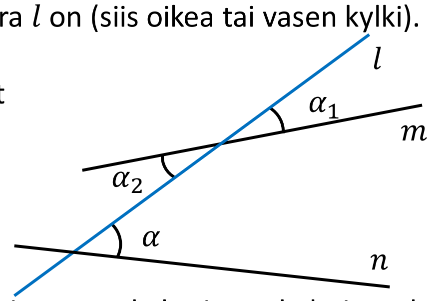
a) Kulmat ovat toisilleen vieruskulmat eli suplementtikulmat, joten

$$\alpha = 180° - 82° = 98°.$$

b) Kulmat ovat toisilleen ristikulmat, joten $\alpha = 67°$.

Samankohtaiset kulmat: Suoran l leikatessa kahta suoraa m ja n syntyy kahdeksan kulmaa, joista ovat keskenään *samankohtaisia* ne, joiden samanniminen kylki suora l on (siis oikea tai vasen kylki).

Kuvassa kulmat α, α_1 ja α_2 ovat samankohtaisia, koska suora l on niiden vasen kylki.

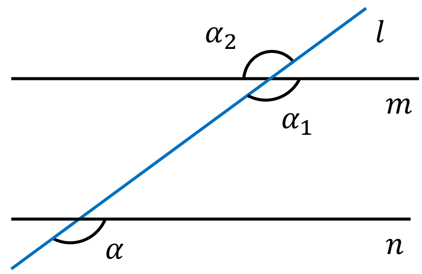


Suorien yhdensuuntaisuudella ja samankohtaisten kulmien yhtäsuuruudella on tärkeä yhteys.

Lause, yhdensuuntaiset suorat ja samankohtaiset kulmat:
Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret.
Myös käänteinen on voimassa: Jos suora leikkaa kahta suoraa siten, että samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret, niin nämä kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset. (Ei todisteta lausetta!)

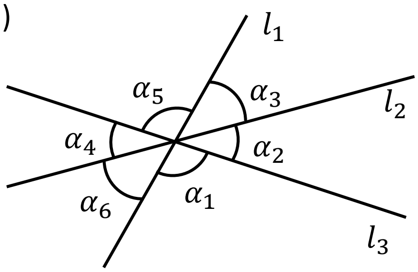
Yhdistettynä: Suoran leikatessa kahta suoraa samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret, jos ja vain jos nämä kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset.

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow m \parallel n$$

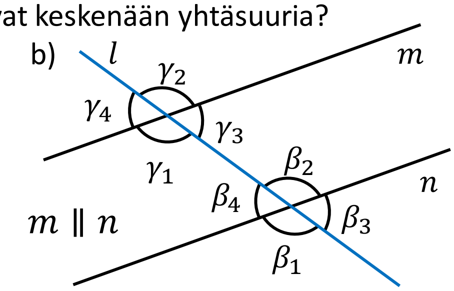


Esimerkki/harjoitus:
Mitkä kuvioihin merkityt kulmat ovat keskenään yhtäsuuria?

a)



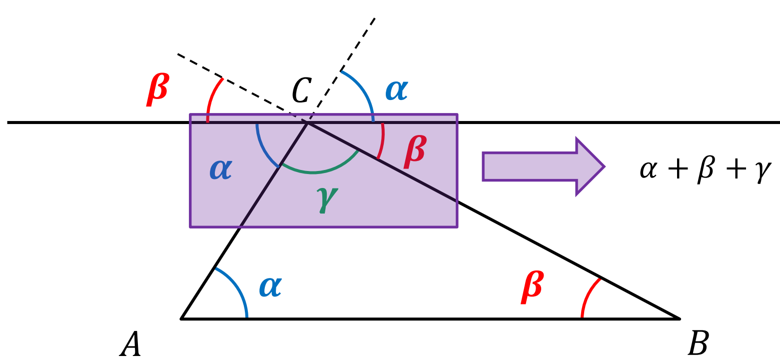
b)



a) $\alpha_1 = \alpha_5$, $\alpha_2 = \alpha_4$ ja $\alpha_3 = \alpha_6$

b) $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = \gamma_1$ ja
$\beta_3 = \beta_4 = \gamma_3 = \gamma_4$

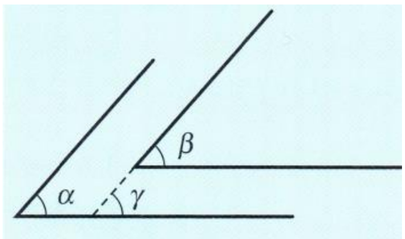
Edellisen lauseen tulosta hyödyntäen osoitetaan, että kolmion kulmien summa on 180°.



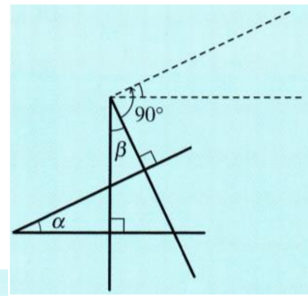
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Kahden koveran kulman α ja β, eli $0° < \alpha, \beta < 180°$, suuruutta voidaan verrata seuraavilla lauseilla:

Kaksi koveraa kulmaa ovat yhtä suuria, jos niiden samannimiset kyl-jet ovat yhdensuuntaiset.



Kaksi koveraa kulmaa ovat yhtä suuria, jos niiden samannimiset kyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



Esimerkki
Laske kulman $\sphericalangle D$ suuruus.

Vastaus: $\sphericalangle D = 30°$