Korkeamman asteen epäyhtälöt

Perusidea sama kuin 2. asteen epäyhtälöissä, nyt ratkaisujoukot eli ratkaisuvälit saadaan ns. merkkikaaviosta.

Ratkaisumenettely:

1) Muutetaan epäyhtälö normaalimuotoon (jos ei jo ole valmiina)

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 > 0, \qquad (<, \leq, \geq, \neq).$$

2) Määritetään polynomin

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

nollakohdat (tekijälause, polynomin jakokulma, TI-nspire, …).

3) Selvitetään $p(x)$:n merkit (siis positiivista vai negatiivista) nollakohtien määräämillä väleillä kuvaajan, testiarvojen tai **merkkikaavion** avulla. (Yleensä käytetään merkkikaaviota ja se on suositus.)

4) Päätellään ratkaisujoukko.

Esimerkki Ratkaise epäyhtälö $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \geq 0$.

1)-kohta OK, eli epäyhtälö on jo valmiina perusmuodossa.

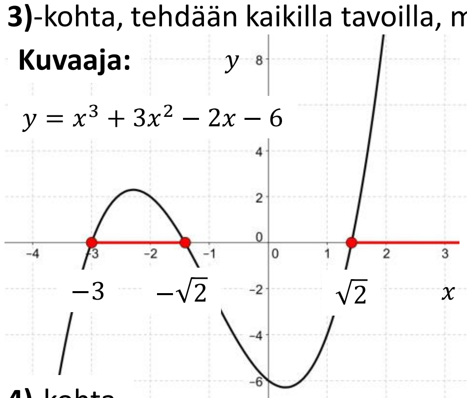
2)-kohta, nollakohdat: Havaitaan, että ryhmittely antaa

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x+3) - 2(x+3) = 0$$

$$(x^2 - 2)(x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \;\text{ tai }\; x = -3$$

3)-kohta, tehdään kaikilla tavoilla, mutta merkkikaavio on suositeltavin!

Kuvaaja:



testiarvot: -3 $\quad -\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{2}$

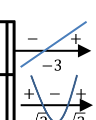
$p(x)$	−	+	−	+

$p(-10) = -686 \quad p(0) = -6$

$p(-2) = 2 \quad p(2) = 10$

merkkikaavio:

	(-3)	$(-\sqrt{2})$	$(\sqrt{2})$	
$x+3$	−	+	+	+
x^2-2	+	+	−	+
tulo	−	+	−	+



4)-kohta

Vastaus: $-3 \leq x \leq -\sqrt{2}$ ja $\sqrt{2} \leq x$.

Esimerkki Ratkaise epäyhtälö $(x^2+1)(3-x^2)(1-2x) < 0$.

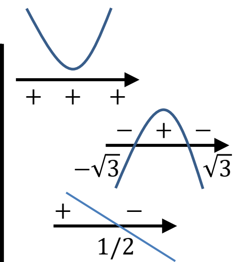
1)-kohta, OK. **2)**-kohta, epäyhtälö on tulomuodossa, joten nollakohdat:

$$x = \pm i \in \mathbb{C}, \qquad x = \pm\sqrt{3}, \qquad x = \frac{1}{2}\,.$$

3)-kohta, merkkikaavio

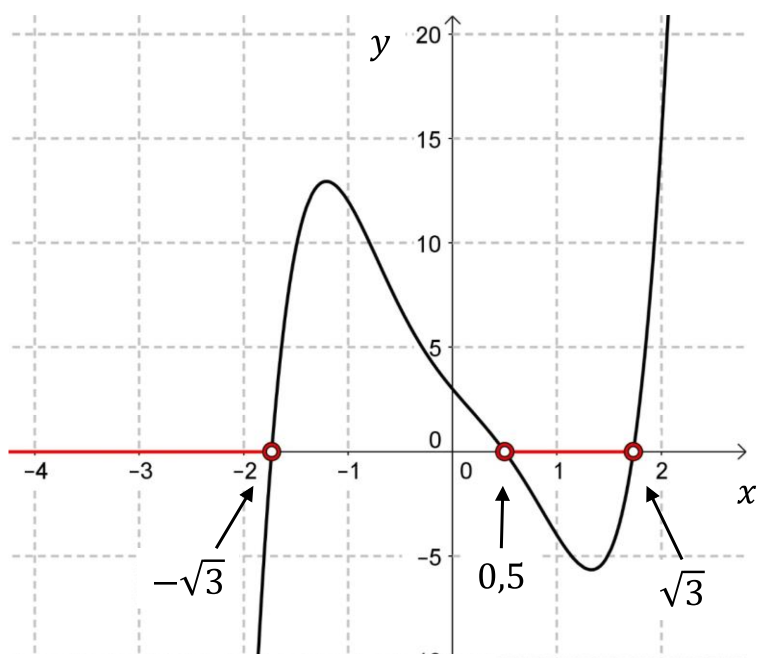
$-\sqrt{3}$ $\quad 1/2 \quad$ $\sqrt{3}$

x^2+1	+	+	+	+
$3-x^2$	−	+	+	−
$1-2x$	+	+	−	−
tulo	−	+	−	+



4)-kohta, vastaus: $x < -\sqrt{3}$ ja $\frac{1}{2} < x < \sqrt{3}$. Huomaa avonaiset välit!

Piirretään lopuksi kuvaaja!



$y = (x^2+1)(3-x^2)(1-2x)$