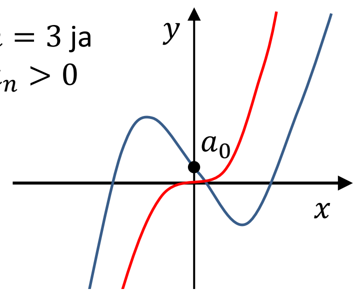
Korkeamman asteen polynomifunktio

Määritelmä:
Jos polynomifunktion asteluku $n \geq 3$, niin funktiota sanotaan *korkeamman asteen polynomifunktioksi*,

$$P\colon\ P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \,.$$

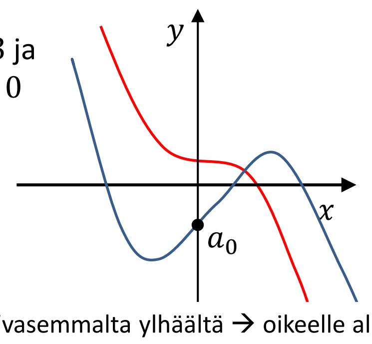
Kuvaajien karkeat hahmotelmat (eli saadaan idea minkälaisesta kuvaajasta on kyse) ovat seuraavanlaiset:

$n = 3$ ja
$a_n > 0$



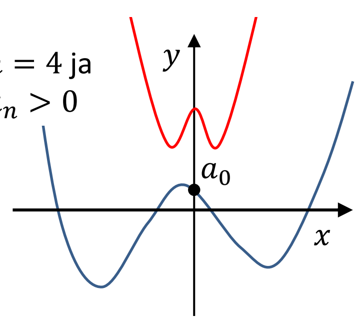
”vasemmalta alhaalta → oikeelle ylös”

$n = 3$ ja
$a_n < 0$



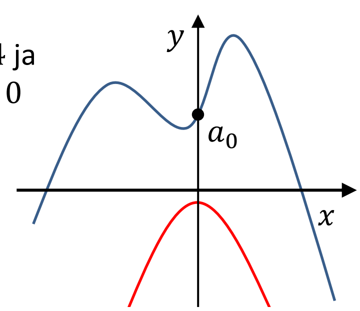
”vasemmalta ylhäältä → oikeelle alas”

$n = 4$ ja
$a_n > 0$



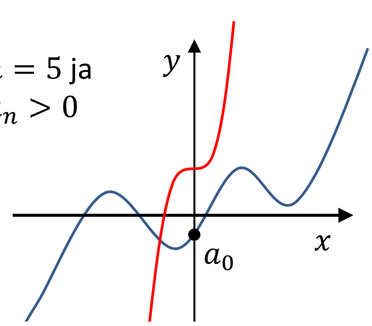
”vasemmalta ylhäältä → oikeelle ylös”

$n = 4$ ja
$a_n < 0$



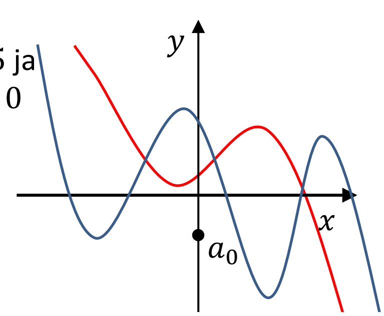
”vasemmalta alhaalta → oikeelle alas”

$n = 5$ ja
$a_n > 0$



”vasemmalta alhaalta → oikeelle ylös”

$n = 5$ ja
$a_n < 0$



”vasemmalta ylhäältä → oikeelle alas”

Huomautus 1 Kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia, derivoituvia ja integroituvia! Eli ns. *hyvin käyttäytyviä* funktioita. Polynomifunktiot ovat ”mukavia funktioita” ja niillä approksimoidaan eli arvioidaan/mallinnetaan vaikeita funktioita (Taylorin approksimaatiomenetelmä). Tarkempi tarkastelu → MAA 7, MAA 10 ja MAA 13.

Huomautus 2 Jokainen polynomifunktio voidaan esittää tulomuodossa nollakohtiensa (jotka ovat kompleksilukuja!) suhteen. Tämän sanoo tekijälause. Lisäksi pätee:

Algebran peruslause:
Jokaisella polynomifunktiolla (≠vakio) on ainakin 1 nollakohta ja nollakohtien kertaluvut huomioiden nollakohtia on yhteensä polynomin asteen ilmoittama lukumäärä.

Esimerkki Polynomilla P: $P(x) = x^7 - 6x^3 + 2x - 1$ on korkeintaan 7 eri nollakohtaa.

Korkeamman asteen yhtälö

POLYNOMIFUNKTIOT JA -YHTÄLÖT, MAA2

Määritelmä:
Korkeamman asteen yhtälö on sellainen polynomiyhtälö, jossa tuntemattoman ($= x$) asteluku n on vähintään 3. Yhtälön perusmuoto on

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0\,.$$

Tavoite on löytää yhtälön ratkaisut (siis ne x:ät eli luvut, jotka toteuttavat yhtälön) muokkaamalla lauseke ensin *tulomuotoon*, eli jakamalla lauseke tekijöihin ja sitten tulon nollasääntöä käyttämällä määrittää nollakohdat.

Muista: Yhtälö ensin perusmuotoon mikäli se ei jo ole sitä!

Esimerkki 1 Jaa tekijöihin

a) $18x^3 - 2x$ **b)** $3x^3 - 12x^2 + 12x$ **c)** $8x^3 - 4x^2 - 4x$

ja ratkaise yhtälö

a) $18x^3 - 2x = 0$ **b)** $3x^3 - 12x^2 + 12x = 0$ **c)** $8x^3 - 4x^2 - 4x = 0$.

a)

$$18x^3 - 2x = 2x(9x^2 - 1) = 2x(3x-1)(3x+1)$$

Näin ollen

$$18x^3 - 2x = 0$$

$$2x(3x-1)(3x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, \quad 3x - 1 = 0, \quad 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}, \qquad x = -\frac{1}{3}$$

b)

$$3x^3 - 12x^2 + 12x = 3x(x^2 - 4x + 4) = 3x(x-2)^2$$

Näin ollen

$$3x^3 - 12x^2 + 12x = 0$$

$$3x(x-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, \quad x = 2$$

Huom!

Juuri $x = 2$ on kaksinkertainen

c)

$$8x^3 - 4x^2 - 4x = 4x(2x^2 - x - 1) = 4x(2x+1)(x-1)$$

Huom. Ratkaisukaavasta saadaan $2x^2 - x - 1 = 2(x + 1/2)(x - 1)$.

Näin ollen

$$8x^3 - 4x^2 - 4x = 0$$

$$4x(2x+1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, \quad 2x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, \qquad x = 1$$

Esimerkki 2 (ryhmittelykeino) Jaa tekijöihin

a) $x^2(x-3) - 16(x-3)$ **b)** $2x^3 + x^2 + 8x + 4$

ja ratkaise yhtälö

a) $x^2(x-3) - 16(x-3) = 0$ **b)** $2x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$

a)

$$x^2(x-3)-16(x-3)=(x^2-16)(x-3)=(x+4)(x-4)(x-3)$$

Näin ollen

$$x^2(x-3)-16(x-3)=0$$

$$(x+4)(x-4)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow \qquad x=-4, \qquad x=4, \qquad x=3$$

b)

$$2x^3+x^2+8x+4=x^2(2x+1)+4(2x+1)=(x^2+4)(2x+1)$$

Näin ollen

$$2x^3+x^2+8x+4=0$$

$$(x^2+4)(2x+1)=0$$

$$\Rightarrow \qquad x=-1/2$$

Huomaa, että tekijä $(x^2+4)>0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$.

Huom!

Kompleksiset juuret $x=\pm 2i$ löytyvät

Esimerkki 3 bikvadraattinen yhtälötyyppi Ratkaise yhtälöt

a) $x^4-3x^2-4=0$ **b**) $x^6=6x^3+16$

a) Merkitään $y=x^2$, jolloin alkuperäinen yhtälö tulee muotoon

$$y^2-3y-4=0\,.$$

Ratkaisukaava antaa

$$y=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y=4 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Nyt on y saatu ratkaistua. Lopuksi pitää vielä ratkaista x. Siis

$$y=x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 4=x^2 \\ -1=x^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{-1}\ \text{ eli } x\notin\mathbb{R} \end{cases}$$

Ratkaisu $x=\pm 2$.

b) Merkitään $y=x^3$, jolloin alkuperäinen yhtälö tulee muotoon

$$y^2-6y-16=0\,.$$

Ratkaisukaava antaa

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = 8 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Nyt on y saatu ratkaistua. Lopuksi pitää vielä ratkaista x. Siis

$$y = x^3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 8 = x^3 \\ -2 = x^3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{8} = 2 \\ x = \sqrt[3]{-2} \approx -1{,}259 \end{cases}$$

Ratkaisu $x = 2$ tai $x = \sqrt[3]{-2} \approx -1{,}259$. Muista, pariton juuri on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 4 Ratkaise yhtälö $(x^2 - 1)(x^2 - 8) = x^2 - 1$.

$$(x^2 - 1)(x^2 - 8) = x^2 - 1$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 8) - 1 \cdot (x^2 - 1) = 0$$

$$\big((x^2 - 8) - 1\big) \cdot (x^2 - 1) = 0 \qquad \text{ryhmittely}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 9 = 0, \qquad x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 3 \ \vee \ x = \pm 1$$

Esimerkki 5 (tyypillinen koeteht.) Määritä vakio k siten, että yhtälön

$$2x^3 - (2k - 10)x^2 - 7x + 13 + k = 0$$

eräs ratkaisu on $x = 3$. Mitkä ovat tällöin muut ratkaisut?

Yhtälöä vastaa polynomifunktio

$$P\colon\ P(x) = 2x^3 - (2k - 10)x^2 - 7x + 13 + k\,.$$

Tekijälause antaa (koska eräs ratkaisu = juuri on 3) $P(3) = 0$. Siis

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 - (2k - 10) \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 13 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 54 - 2k \cdot 9 + 10 \cdot 9 - 21 + 13 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 54 - 18k + 90 - 8 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad -17k = -136$$

$$\Leftrightarrow \qquad k = \frac{-136}{-17} = 8$$

Yhtälö saadaan nyt muotoon (sijoitetaan $k = 8$) kun 3 on eräs juuri:

$$2x^3 - (2 \cdot 8 - 10)x^2 - 7x + 13 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^3 - 6x^2 - 7x + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2(x-3) - 7(x-3) = 0 \qquad \text{ryhmittely}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x^2 - 7)(x-3) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 2x^2 - 7 = 0, \qquad x - 3 = 0$$

$$2x^2 = 7, \qquad x = 3$$

$$x = \pm\sqrt{7/2} \qquad x = 3$$

Ratkaisu Vakion k arvo 8 (kun $x = 3$ on eräs juuri). Tällöin muut juuret ovat

$$x = \pm\sqrt{7/2}\,.$$