POTENSSIFUNKTIO JA -YHTÄLÖ

Määritelmä, potenssifunktio:
Potenssifunktioksi sanotaan funktiota, jonka määrittelevä lauseke on potenssi ja kantalukuna on muuttuja x.

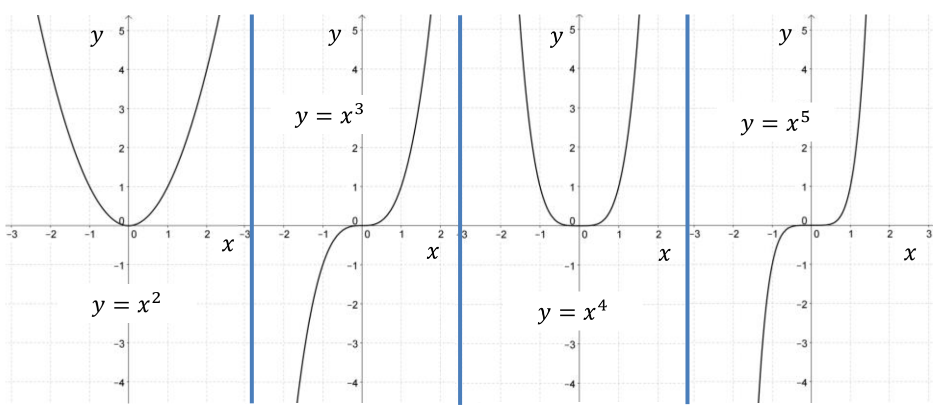
Esimerkki $f\colon f(x) = x^3$ on potenssifunktio, samoin $g\colon g(x) = x^4$ on potenssifunktio ja yleisesti, kun $n \in \mathbb{N}$, niin funktiota, jotka ovat muotoa

$$f\colon f(x) = x^n$$

Toisinaan hyväksytään myös $f\colon f(x) = cx^n,\ c \in \mathbb{R}$.

sanotaan potenssifunktioiksi.

Määrittelyjoukkona $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$, arvojoukkona $\mathcal{A}_f = [0, \infty[$, kun n on parillinen ja toisaalta $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$, kun n on pariton → kirjan kuvat s. 112-113 ja seuraava dia.



n parillinen, $n = 2$ | n pariton, $n = 3$ | n parillinen, $n = 4$ | n pariton, $n = 5$

Kun n on parillinen, kuvaaja on 1. ja 2. neljänneksessä ja kun n pariton niin kuvaaja on 1. ja 3. neljänneksessä.

Määritelmä, potenssiyhtälö:
Potenssiyhtälö on muotoa tai voidaan saattaa muotoon

$$x^n = a, \qquad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}\,.$$

Potenssiyhtälön ratkaisujen $x = \sqrt[n]{a}$ olemassaolo ja lukumäärä riippuvat luvuista n ja a.

Kun n on **parillinen** ja $a \geq 0$, niin yhtälön $x^n = a$ ratkaisut ovat

$$x = \pm \sqrt[n]{a}\,.$$

Jos $a < 0$ → ei ratkaisuja (yhtälöä ei ole määritelty).

Kun n on **pariton**, niin yhtälön $x^n = a$ ratkaisu on yksikäsitteinen kaikilla $a \in \mathbb{R}$

$$x = \sqrt[n]{a}\,.$$

Esimerkki Ratkaise potenssiyhtälö

a) $x^5 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[5]{4} \approx 1{,}319$

b) $x^7 = -58 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[7]{-58} \approx -1{,}7861$

c) $x^6 = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt[6]{3} \approx \pm 1{,}2009$

d) $x^6 = -3 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt[6]{-3} \in \mathbb{C}$, ei reaalisia ratkaisuja

e) $5^x = 4 \quad \Longrightarrow$ ei ole potenssiyhtälö, $x = \log_5 4 \approx 0{,}861$

Entäpä, jos eksponentti on negatiivinen kokonaisluku tai nolla. Muotoa

$$f\colon\ f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$$

oleva funktio on potenssifunktio. Nyt määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ja $\mathcal{A}_f =]0,\infty[$, kun n parillinen ja $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, kun n pariton.

Ja kun $n = 0$ saadaan vakiofunktio

$$f\colon\ f(x) = x^0 = 1, \qquad \forall\, x \neq 0\,.$$

Esimerkki **a)** $f\colon\ f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ **b)** $g\colon g(x) = x^{-17} = \frac{1}{x^{17}}$

Vastaava potenssiyhtälö

$$x^n = a,$$

jonka ratkaisut $x = \sqrt[n]{a}$ riippuvat n:stä ja a:sta kuten aiemmin.

Esimerkki Ratkaise potenssiyhtälö

a) $x^{-2} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{x^2} = 3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \dfrac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $x^{-2} = -3 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{x^2} = -3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = -\dfrac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{-3}}$

$\in \mathbb{C}$, ei reaalisia ratkaisuja

c) $x^{-3} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{x^3} = 3 \quad \Longrightarrow \quad x^3 = \dfrac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

d) $x^{-3} = -3 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{x^3} = -3 \quad \Longrightarrow \quad x^3 = -\dfrac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-3}}$

Murtopotenssifunktio

Muotoa
$$f\colon f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$
oleva funktio on potenssifunktio (ns. murtopotenssifunktio), jolle pätee $\mathcal{M}_f =]0, \infty[= \mathcal{A}_f$.

Murtopotenssiyhtälöllä
$$x^{\frac{m}{n}} = a$$
on määritelmästä johtuen täsmälleen yksi ratkaisu $x = \sqrt[n]{a^m}$ edellyttäen, että $a > 0$!

Esimerkki Ratkaise potenssiyhtälö

a) $x^{0,5} = 3$

$$x^{1/2} = 3 \overset{\uparrow^2}{\Leftrightarrow} x = 3^2 = 9$$

b) $x^{-1,5} = 8$

$$x^{-3/2} = 8 \overset{\uparrow^{2/3}}{\Leftrightarrow} x^{-1} = 8^{2/3}$$

$$1/x = \sqrt[3]{64} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1/4$$

Esimerkki Ratkaise yhtälö

a) $(3x - 1)^{-1/3} = 6$

Aluksi: yhtälö on määritelty, kun $3x - 1 > 0$, eli kun $x > 1/3$. Tällöin
$$(3x-1)^{-1/3} = 6 \overset{\uparrow^{-3}}{\Leftrightarrow} 3x - 1 = 6^{-3} = \frac{1}{216}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x = \frac{1}{216} + 1 = \frac{217}{216} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\frac{217}{216}}{3} = \frac{217}{648} \approx 0{,}3349$$

b) $\sqrt[3]{3x-1} = -6$

Aluksi: nyt yhtälö on hyvin määritelty, sillä pariton juuri, jolloin $3x - 1$ ei tarvitse olla ei-negatiivista. Saadaan
$$\sqrt[3]{3x-1} = -6 \overset{\uparrow^{3}}{\Leftrightarrow} 3x - 1 = (-6)^3 = -216$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x = -216 + 1 = -215 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{215}{3} \approx -77{,}67$$

c) Onko $\underset{\mathcal{M}_f = \mathbb{R}}{\sqrt[3]{3x-1}} = \underset{\mathcal{M}_f =]1/3, \infty[}{(3x-1)^{1/3}}$?

Kyllä on, mutta eri määrittelyjoukot!?