Juurien summa ja tulo

Esimerkki Määritä yhtälön $x^2 - 7x + 12 = 0$
a) ratkaisut, **b)** ratkaisujen summa ja **c)** ratkaisujen tulo.

a) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies x_1 = 3$ ja $x_2 = 4.$

b) $3 + 4 = 7$

c) $3 \cdot 4 = 12$

Mitä huomataan?
Ratkaisujen summa $x_1 + x_2$ on 1.asteen termin $-7x$ kertoimen -7 vastaluku jaettuna 2.asteen termin kertoimella 1 ja ratkaisujen tulo $x_1 \cdot x_2$ on vakiotermi jaettuna 2.asteen termin kertoimella 1.

Vastaava tulos pätee kaikille toisen asteen yhtälöille.

Todistus Kun diskriminantti $D = b^2 - 4ac \geq 0$, niin 2.asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisut ovat

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad .$$

Tällöin

summa: $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{D}-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

tulo: $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{b^2+b\sqrt{D}-b\sqrt{D}-D}{4a^2} = \frac{b^2-D}{4a^2}$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Siis

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \ .$$

Ilmoitetaan tämä vielä lauseena (eli matemaattisena tuloksena).

Lause:
Jos toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ reaaliset ratkaisut ovat x_1 ja x_2, niin tällöin

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \ .$$

Ja jos $a = 1$, niin $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 \cdot x_2 = c$.

Myös käänteinen tulos on voimassa, eli jos luvuille x_1 ja x_2 pätee $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, niin luvut x_1 ja x_2 ovat yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ratkaisut.

Esimerkki Määritä yhtälön $2x^2 - x - 3 = 0$ ratkaisujen summa ja tulo **a)** ratkaisemalla yhtälö ja **b)** ratkaisematta yhtälöä.

a) Ratkaisukaava antaa $x_1 = -1$ ja $x_2 = 3/2$, joten

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, \qquad x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2} \ .$$

b) Koska $a = 2$, $b = -1$ ja $c = -3$, niin

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{2} \ .$$

2.asteen polynomin tekijöihin jako

Esimerkki **a)** Polynomin $x^2 - 4$ nollakohdat ovat $x_1 = 2$ ja $x_2 = -2$. Summan ja erotuksen tuloa hyödyntäen saadaan (tämä siis tuttua)

$$x^2 - 4 = (x-2)\big(x-(-2)\big) = (x - x_1)(x + x_2)\,.$$

b) Polynomin $P: P(x) = 2x^2 - 10x + 12$ nollakohdat ovat $x_1 = 2$ ja $x_2 = 3$ (ratkaisukaavasta/laskimesta). Nyt kuitenkaan ei päde

$$P(x) = (x-2)(x-3)\,,$$

sillä

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6\,.$$

Mutta, jos kerrotaan kahdella, eli termin ax^2 kertoimella a $(= 2)$, niin

$$P(x) = 2(x-2)(x-3) = 2x^2 - 10x + 12\,.$$

Lause:
Jos toisen asteen polynomin $P: P(x) = ax^2 + bx + c$ nollakohdat ovat x_1 ja x_2, niin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Todistus Tiedetään, että $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, jolloin

$$b = -a(x_1 + x_2), \qquad c = a(x_1 \cdot x_2)\,.$$

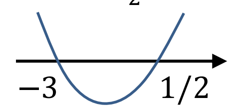
Näin ollen

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= ax^2 \overbrace{-a(x_1 + x_2)}^{=+b}x \overbrace{+a(x_1 \cdot x_2)}^{=+c} \\
&= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) \\
&= a(\underbrace{x^2 - x_1x}\underbrace{- x_2x + x_1x_2}) \\
&= a\big(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\big) \\
\text{ryhmittely} \longrightarrow &= a(x - x_2)(x - x_1) \\
&= a(x - x_1)(x - x_2)
\end{aligned}$$

Esimerkki Jaa tekijöihin
a) $2x^2+5x-3$ **b)** $3x^2-18x+27$ **c)** x^2+x+1 .

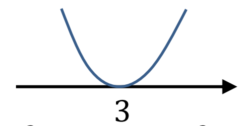
a) Polynomin $2x^2+5x-3$ nollakohdat ovat $x_1=-3$ ja $x_2=\frac{1}{2}$ (ratk.-kaavasta)

$$\Rightarrow \quad 2\big(x-(-3)\big)(x-1/2)=2(x+3)(x-1/2)$$



b) Nollakohta $x_1=3$, entä toinen?... Ei hätää, tämä nollakohta on kaksinkertainen, siis

$$\Rightarrow \quad 3(x-3)(x-3)=3(x-3)^2$$



Toisaalta

$$3x^2-18x+27=3(x^2-6x+9)=3(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2)=3(x-3)^2$$

c) Nyt $D=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$, eli ei ole reaalisia ratkaisuja! Kompleksiratkaisut löytyvät ja näin ollen

$$\Rightarrow \quad x^2+x+1=1\cdot\left(x-\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$$

Lause, tekijälause (tärkeä, kirjoitetaan vihkoon!):
Binomi $x-x_0$ on polynomin P tekijä **jos ja vain jos** $x=x_0$ on polynomin P nollakohta.
Ts.

$x-x_0$ on P: $P(x)$:n tekijä,
jolloin $P(x)=(x-x_0)Q(x)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $P(x_0)=0$

Esimerkki Tiedetään, että $x-\frac{1}{2}$ on polynomin $2x^2+5x-3$ tekijä, sillä

$$\left.\begin{aligned}\underbrace{2x^2+5x-3}_{=P(x)}&=2(x+3)(x-1/2)\\ &=\underbrace{(2x+6)}_{=Q(x)}(x-1/2)\\ &=\quad Q(x)\quad\cdot(x-x_0)\\ P(x)&=\quad Q(x)\quad\cdot(x-x_0)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\quad P(1/2)=0\ \text{ Onko?}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\frac{1}{2}-3$$
$$=2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0,\qquad \text{OK}$$

Esimerkki Määritä k siten, että polynomin $P: P(x) = kx^2 + x - 6$ tekijä on $x - 4$. Jaa näin saatu polynomi tekijöihin.
Tekijälauseen nojalla

$$P(4) = k \cdot 4^2 + 4 - 6 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \frac{1}{8}.$$

Edelleen

$$P(x) = Q(x)(x-4)$$

$$\tfrac{1}{8} \cdot x^2 + x - 6 = Q(x)(x-4)$$

$$\Longrightarrow \quad Q(x) = \frac{\frac{1}{8} \cdot x^2 + x - 6}{x - 4}$$

$$\rightarrow \text{jakokulma tai TI} - \text{nspire}$$

$$\begin{array}{r|lll}
 & \frac{1}{8} \cdot x & + \frac{3}{2} & \\
\hline
x - 4 & \frac{1}{8} \cdot x^2 & + x & - 6 \\
 & \mp \frac{1}{8} \cdot x^2 & \pm \frac{1}{2} x & \\
\cline{2-3}
 & — & + \frac{3}{2} x & \\
 & & \mp \frac{3}{2} x & \pm 6 \\
\cline{3-4}
 & & — & —
\end{array}$$

Jako meni tasan, niin kuin pitääkin. Näin ollen

$$Q(x) = \frac{1}{8} \cdot x + \frac{3}{2} = \frac{1}{8}(x + 12) \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\tfrac{1}{8} \cdot x^2 + x - 6}_{=P(x)} = \underbrace{\tfrac{1}{8}(x + 12)}_{=Q(x)} \cdot \underbrace{(x - 4)}_{=x - x_0}$$

Polynomin $P(x)$ tekijät ovat siis $\frac{1}{8}$, $(x + 12)$ ja $(x - 4)$.

Huomautus Tekijälauseen perusteella polynomin $Q(x)$ aste on vähintään yhtä pienempi kuin polynomin $P(x)$ aste.

Toisen asteen polynomin jakokulma

Esimerkki Jaa $3x^2 - 4x + 1$ binomilla $x - 1$ ja $x - 2$.

Esimerkki Jaa $-5x^2 + 13$ binomilla $x + 5$.

Tehdään taululla.