Diskriminantti

Määritelmä:
Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaavassa olevaa juurrettavaa

$$D = b^2 - 4ac$$

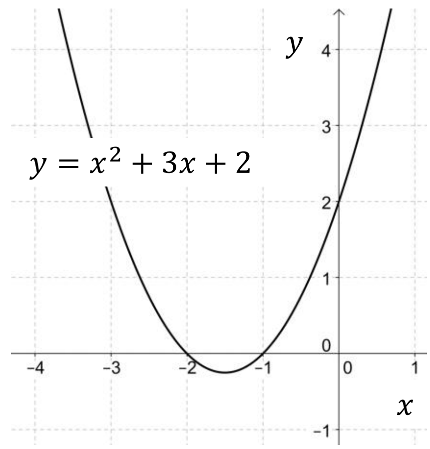
sanotaan yhtälön diskriminantiksi.

Esimerkki Ratkaise yhtälöt:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

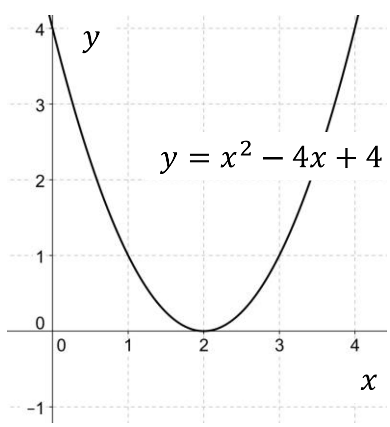
c) $x^2 - 2x + 2 = 0$



a) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$

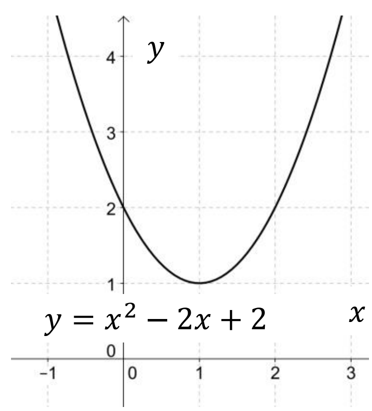
$\Longrightarrow \quad x = -2 \quad \vee \quad x = -1$

b) $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$



c) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

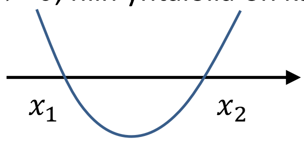
Ei reaalisia nollakohtia!

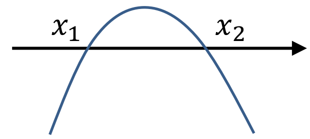


Näiden esimerkkien myötä saadaan tulos

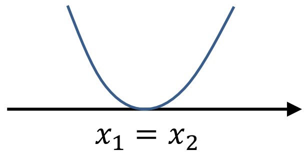
Lause:
Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisujen lukumäärä riippuu diskriminantista $D = b^2 - 4ac$.

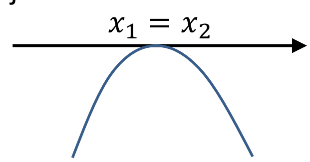
Jos $D > 0$, niin yhtälöllä on kaksi erisuurta ratkaisua.



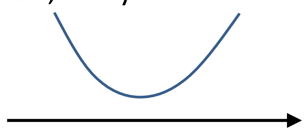


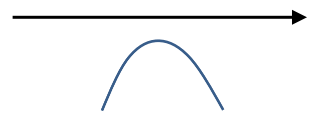
Jos $D = 0$, niin yhtälöllä on yksi ratkaisu, joka on kaksinkertainen.





Jos $D < 0$, niin yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja.





Entä jos $D < 0$? Tällöin ratkaisu eli juuri on kompleksiluku $z = x + iy$. Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C} = \{z = x + iy |\ x, y \in \mathbb{R} \text{ ja } i \text{ on imag. yks.}\}$ ja lisäksi pätee ns. kompleksinen struktuuri $\sqrt{-1} = i$ eli $i^2 = -1$.

Aiemmin saatiin yhtälölle $x^2 - 2x + 2 = 0$ **c)**-kohta, että ei reaalista ratkaisua. Kompleksinen ratkaisu kuitenkin löytyy, nimittäin

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\overbrace{\sqrt{-1}}^{=i}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Kompleksiluvut

Vuonna 1545 Cardano (italialainen) ratkaisi yhtälön

$$x(10-x)=40$$

kertomalla keskenään luvut $5+\sqrt{-15}$ ja $5-\sqrt{-15}$, jolloin

$$\Longrightarrow \quad 5^2-(-15)=25+15=40, \qquad \text{OK},$$

Mutta mitä tarkoittaa luku $\sqrt{-15}$?

Lukujoukoista

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

kompleksilukujen joukko

$$\mathbb{C}=\{\, z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R} \text{ ja } i \text{ on imaginaariyksikkö}\}$$

on laajin.

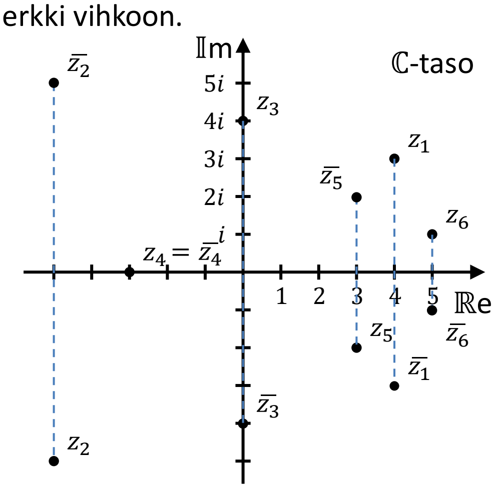
Kompleksiluvut ovat siis muotoa $z=x+iy$ (tai $z=x+yi$) ja puhutaan $\mathbb{C}$-tasosta, joka samaistetaan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-tasoon, sillä erotuksella, että $\mathbb{C}$-tasossa on ns. kompleksinen struktuuri (rakenne) $i^2=-1$.

Lisäksi käytössä ei ole x- ja y- koordinaatit kuten $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-tasossa, vaan reaaliosa (”x”) ja imaginaariosa (”y”). Usein kuitenkin puhutaan x- ja y- koordinaateista. Seuraava esimerkki vihkoon.

Esimerkki Olkoot

$$\begin{aligned}
z_1 &= 4 + 3i\\
z_2 &= -5 - 5i\\
z_3 &= 4i\\
z_4 &= -3\\
z_5 &= 3 - 2i\\
z_6 &= 5 + i
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}$e-osat (”x”) $\quad$ $\mathbb{I}$m-osat (”y”)



Tällöin ns. liittoluvut (miksi → syy selviää) ovat:

$$\overline{z_1}=4-3i, \qquad \overline{z_2}=-5+5i, \qquad \overline{z_3}=-4i, \qquad \overline{z_4}=-3, \ldots$$

Toisin sanoen liittoluvut ovat peilikuvia $\mathbb{R}$e-akselin suhteen ja vaikutus on siis $\mathbb{I}$m-osan etumerkin vaihtuminen. Yleisesti, jos $z = x + iy$, niin $\bar{z} = x - iy$.

Yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku:
Hyvin suoraviivaista.

Esimerkki $z_1 + z_2 = (4 + 3i) + (-5 - 5i) = -1 - 2i$

$$z_6 - z_5 = (5 - i) - (3 - 2i) = 2 + i$$

Siis yhteen- ja vähennyslaskuissa reaaliosat keskenään, samoin imaginaariosat keskenään.

$$\begin{aligned} z_5 \cdot z_1 = (3 - 2i)(4 + 3i) &= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3i - 2i \cdot 4 - 2i \cdot 3i \\ &= 12 + 9i - 8i - 6i^2 \\ &= 12 + 6 - i \\ &= 18 - i \end{aligned}$$

Muista
$i^2 = -1$

$$z_2 \cdot \overline{z_3} = (-5 - 5i) \cdot (-4i) = 20i + 20i^2 = -20 + 20i$$

Entäpä

$$\frac{z_1}{z_6} = \frac{4 + 3i}{5 - i} \;\; ?$$

Ongelmana näyttäisi olevan nimittäjässä oleva i. Hyödynnetään neliöiden erotusta.

Siis

$$\frac{z_1}{z_6} = \frac{4 + 3i}{5 - i} = \frac{(4 + 3i)\color{red}{(5 + i)}}{(5 - i)\color{red}{(5 + i)}} = \frac{20 + 15i + 4i - 3}{25 - 5i + 5i + 1} = \frac{17 + 19i}{26}$$

$$= \frac{17}{26} + \frac{19}{26} i$$

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{4i}{-5 - 5i} = \frac{4i \cdot (-5 + 5i)}{(-5 - 5i)(-5 + 5i)} = \frac{-20i - 20}{25 - 25i + 25i + 25}$$

$$= \frac{-20 - 20i}{50} = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5} i$$

Tehtäviä: Sijoita kompleksiluvut z_i $\mathbb{C}$-tasoon ja määritä liittoluvut $\overline{z_i}$ (sijoita myös ne $\mathbb{C}$-tasoon).

$z_1 = 3 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$, $z_3 = -4 + 2i$, $z_4 = 5 - 4i$,

$z_5 = -2i$, $z_6 = -3 - 7i$, $z_7 = 6$, $z_8 = i$

Laske $z_1 + z_4$, $z_6 - \overline{z_2}$,

$z_3 \cdot z_7$, $z_2 \cdot \overline{z_6}$,

$\frac{z_1}{z_3}$, $\frac{z_5}{\overline{z_4}}$,

${z_8}^3$

Mitä tarkoittaa tulos

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ ?} \qquad \text{esim.}\, z = 4 + 3i$$

Lisätehtäviä Sivulta 133 tehtävät 25 – 29 (jos ehtii tehdä yllä olevat.)