

Toisen asteen epäyhtälöt

Normaalimuotoisen toisen asteen epäyhtälön

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \text{tai merkki } <, \leq, \geq, \neq$$

ratkaisumenettely:

1) Muutetaan epäyhtälö normaalimuotoon (jos ei jo ole valmiina)

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

2) Ratkaistaan vastaavan yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ nollakohdat (esimerkiksi laskimella tai ratkaisukaavalla).

3) Luonnostellaan paraabeli (aukeamissuunta ja nollakohdat). Tämä on karkea kuvio – ei tarkka kuvaaja!

4) Päätellään ratkaisujoukko.

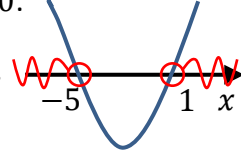
Esimerkki a) Ratkaise epäyhtälö $x^2 + 4x - 5 > 0$.

Nollakohdat: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} \Rightarrow x = -5 \vee x = 1$.

Ratkaisujoukko: $x < -5$ tai $x > 1$.

ylöspäin aukeava
paraabeli!

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$



Esimerkki b) Ratkaise epäyhtälö $3x \geq 2x^2$.

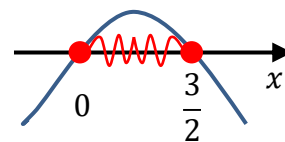
Normaalimuoto: $-2x^2 + 3x \geq 0$

$$x(-2x + 3) \geq 0$$

Nollakohdat: $x = 0 \vee x = 3/2$.

Ratkaisujoukko: $0 \leq x \leq 3/2$.

alaspäin aukeava paraabeli!
 $-2x^2 + 3x = 0$



c) Ratkaise epäyhtälö $-\frac{1}{2}x^2 + 6x - 18 < 0$.

Kerrotaan aluksi -2 :lla, jolloin ey :n suunta kääntyy.

§Saadaan

$$x^2 - 12x + 36 > 0.$$

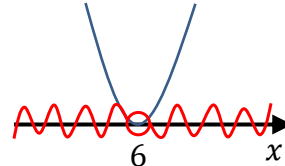
Nollakohdat: $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$.

$$x = 6 \text{ on ainoa nollakohta!}$$

Ratkaisujoukko: $x \neq 6$.

ylöspäin aukeava paraabeli!

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$



Esimerkki d) Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 2x + 2 \leq 0$.

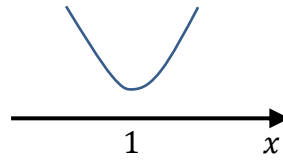
Nyt yhtälöllä $x^2 - 2x + 2 = 0$ ei ole reaalisia ratkaisuja, $D = -4 < 0$.

Paraabeli aukeaa ylöspäin ja kun $x = 0$,

niin $0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$.

Eli $y = x^2 - 2x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ratkaisujoukko: ei reaalisia ratkaisuja



e) Mikä on funktion $f: f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ määrittelyjoukko?

Neliöjuuren määrittelyehto: $4 - x^2 \geq 0$ (reaalisille tapauksille).

Nyt $4 - x^2$ on alaspäin aukeava paraabeli.

alaspäin aukeava paraabeli!
 $4 - x^2 = 0$

Nollakohdat: $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) = 0$.

$x = 2$ tai $x = -2$.

Määrittelyjoukko: $-2 \leq x \leq 2$.

