Toisen asteen yhtälöt

Vaillinainen toisen asteen yhtälö
Määritelmä:
Toisen asteen yhtälön perus- eli normaalimuoto on

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0\,.$$

Sanotaan, että 2. asteen yhtälö on *vaillinainen*, jos b tai c tai molemmat ovat nollia. Muutoin sanotaan, että yhtälö on *täydellinen*.

Vaillinaiset	**Täydellinen**
$ax^2 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
$ax^2 + bx = 0$	
$ax^2 + c = 0$	

Esimerkki Yhtälö $3x^2 - 2x - 1 = 0$ on täydellinen ja yhtälöt

$$\begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 2x = 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ovat vaillinaisia.}$$

Miten toisen asteen yhtälö ratkaistaan?
Tarkastellaan erikseen kaikkia eri vaihtoehtoja (yhteensä siis 4 kpl), aloitetaan ensin vaillinaisista ja sitten täydellinen.

1. Muotoa $ax^2 = 0$ oleva yhtälön ratkaiseminen on suoraviivaista:

$$ax^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\,.$$

Esimerkki Yhtälö $-\frac{\sqrt[3]{45}}{3^5}x^2 = 0$ silloin ja vain silloin, kun $x = 0$.

2. Muotoa $ax^2 + bx = 0$ oleva yhtälö jaetaan ensin tekijöihin ja sitten tulon nollasääntöä käyttäen etsitään ratkaisut:
Tulon nollasääntö: $pq = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 0$ tai $q = 0$ tai molemmat.

Esimerkki Ratkaise yhtälö

a) $x(x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ tai $x + 3 = 0$ eli $x = 0$ tai $x = -3$.

b) $3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 2$.

c) $2x - \frac{1}{3}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(6-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}.$

Esimerkki (jatkuu) Ratkaise yhtälö

d) $x(2x+1)=1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+x=1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+x-1=0$…öö?

3. Muotoa $ax^2+c=0$ oleva yhtälö: ratkaistaan x^2 termi ja otetaan neliöjuuri. Siis

$$ax^2+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2=-c \quad \Leftrightarrow \quad x^2=-\frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\,.$$

Huomaa, että juurrettava $-\frac{c}{a}$ pitää olla ei negatiivista eli $\frac{c}{a} \leq 0$.

Esimerkki Ratkaise yhtälö

a) $x^2-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm 2$ tai

$x^2-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2, x=2$

b) $-\frac{1}{2}x^2+4\frac{1}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2=-\frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

c) $(x+3)^2=6(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x^2+6x+9=6x+6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=-3$

Ei ratkaisuja! Tai on, mutta ne $x \in \mathbb{C}$.

Palautetaan mieleen: yleisesti neliöiden yhtäsuuruusehto:

$$x^2=r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x=r \quad \text{tai} \quad x=-r\,.$$

Esimerkki Määritä paraabelin $y=x^2-2x$ huippu.
Koska termin x^2 kerroin on $1>0$, niin paraabelin aukeaa ylöspäin, katso kuvio.
Yhtälöstä $x^2-2x=0$ saadaan paraabelin ja x-akselin leikkauskohdat x_1 ja x_2. Nimittäin

$$x^2-2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=0 \;\text{ tai }\; x_2=2\,.$$

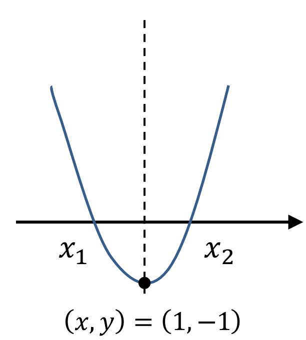
Symmetrisyys huipun kautta kulkevan pystysuoran suhteen antaa x-koordinaatiksi

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0+2}{2}=1$$

ja tätä arvoa käyttäen lasketaan huipun y-koordinaatti

$$y=y(x) \quad \Rightarrow \quad y(1)=1^2-2\cdot 1=-1\,.$$

Siis, huipun koordinaatit ovat $(x,y)=(1,-1)$.



Toisen asteen yhtälöt (jatkuu)

Täydellinen toisen asteen yhtälö

Täydellinen toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ voidaan aina ratkaista neliöiden yhtäsuuruusehdon avulla.

Esimerkki Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x + 1 = 9$.

Koska $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ja $9 = 3^2$, niin

$$x^2 - 2x + 1 = 9$$

$$(x-1)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow \quad x - 1 = 3 \quad \vee \quad x - 1 = -3$$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = -2$$

Esimerkissä vasen puoli oli binomin neliö. Entä jos ei ole? Tällöin ratkaistaan neliöön täydentämällä.
Kirjoitetaan vihkoon seuraava esimerkki.

Esimerkki Ratkaise yhtälö $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Siirretään vakiotermi $x^2 - 6x = -5$

Esitetään 1. asteen termi $-6x$ 2-kertaisena tulona $x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 = -5$

Muista $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Lisätään ”b^2” eli vakio molemmille puolille $x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = -5 + 3^2$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 4$$

Esitetään neliönä $(x-3)^2 = 2^2$

Siis

$$\Rightarrow \quad x - 3 = 2 \quad \vee \quad x - 3 = -2$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = 1$$

Eli ensin neliöön täydentäminen ja loppu kuten edellisessä esimerkissä.

Esimerkki Ratkaise yhtälö $16x^2 + 24x - 16 = 0$. Ole hyvä!
Tee hetki parin kanssa, käydään taululla läpi.

Neliöön täydentäminen on hidasta, siksi on tärkeä tulos, jonka kautta yleensä toisen asteen yhtälö ratkaistaan.

Lause, 2. asteen yhtälön ratkaisukaava (pitää osata ulkoa!):
Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisut ovat

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \text{kun } b^2 - 4ac \geq 0\,.$$

Todistus Kirjassa s.54

Huomautus Ratkaisut, joita sanotaan *juuriksi*, ts. ne x, jotka toteuttavat kyseisen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ saadaan siis termien kertoimista algebrallisilla laskutoimituksilla! Eikö ole ihmeellistä?

Esimerkki Ratkaise yhtälö $x^2 - 3x + 2 = 0$.
Nyt siis $a = 1$, $b = -3$ ja $c = 2$.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{4}{2} = 2 \quad \vee \quad x = \frac{2}{2} = 1$$

Logiikan kvanttorit ja konnektiivit

kvanttorit:
- $\exists$ = olla olemassa, on olemassa (exist),
  esim. $\exists x \in \mathbb{R}$ "on olemassa x (reaalinen)"
- $\forall$ = kaikilla, jokaisella (all),
  esim. $\forall x \in B$ "kaikilla x, jotka kuuluvat joukkoon B"

konnektiivit:
- $\vee$ = tai
- $\wedge$ = ja
- $\Longrightarrow$ = implikaatio, $A \Longrightarrow B$ A:sta seuraa B. Tässä A ja B eivät ole joukkoja vaan jotain väittämiä.
- $\Longleftrightarrow$ = ekvivalenssi, $A \Longleftrightarrow B$ eli $\begin{cases} A \Longrightarrow B \\ B \Longrightarrow A \end{cases}$.
  Käytä harkiten ekvivalenssia!
- $\neg$ = negaatio

Esimerkki Ratkaise yhtälö

$$3x^2 - 2\sqrt{2}x + \frac{2}{3} = 0 \,.$$

Nyt siis $a = 3$, $b = -2\sqrt{2}$ ja $c = \frac{2}{3}$ ja ratkaisukaava antaa

$$x = \frac{-\left(-2\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2/3}}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{4 \cdot 2 - 8}}{6}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Siis vain yksi juuri.

Yleisesti, kun $b^2 - 4ac$ on nolla, niin ratkaisua $x = x_0$ (edellä $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$) sanotaan *kaksinkertaiseksi ratkaisuksi/juureksi*. Syy:

$$3x^2 - 2\sqrt{2}x + \frac{2}{3} = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$$