Binomin laskusääntöjä

Polynomilaskentaan liittyy ns. *binomikaavat*, jotka pitää osata ulkoa (etuperin ja takaperin) ja **soveltaa** → 3kpl, löytyvät myös MAOLista!

1. Neliöiden erotus eli summan ja erotuksen tulo:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad \text{TAI} \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Esimerkki

$$z^2 - 9 = z^2 - 3^2 = (z+3)(z-3)$$

$$(2x-5)(2x+5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 1 &= x^2 - 1^2 = (x+1)(x-1) \\ 3 - 5x^2 &= \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}x\right)^2 = \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}x\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}x\right) \end{aligned}\right\} !$$

$$(x^2+4)(x^2-4) = x^4 - 16$$

Esimerkki

Huijataan...eli kerrotaan ykkösellä, $1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot 1}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot 2}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$$

Esimerkki

$$z^4 - 1 = (z^2)^2 - 1^2 = (z^2+1)(z^2-1) = (z^2+1)(z-1)(z+1)$$

2. Binomin neliöt:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{TAI} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Perustellaan $(a+b)^2$: Koska $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$, niin

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\,.$$

Esimerkki

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(3x-5)^2 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 5 + (-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

$$\left(3\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9\cdot 2 - 3\sqrt{2}x + \frac{x^2}{4}$$

Esimerkki Onko $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$? No, laskin antaa molemmille lausekkeille likiarvoksi 0,267949192. Mutta entäs tarkasti? Merkitään

$$a = 7 - 4\sqrt{3} \qquad \text{ja} \qquad b = 2 - \sqrt{3}$$

ja tutkitaan onko

$$a = b^2 \quad \text{ja} \quad b \geq 0 \text{ koska } a \geq 0\,.$$

Näin on, sillä

$$b^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3$$
$$= 7 - 4\sqrt{3} = a, \qquad \text{OK.}$$

ja

$$b = 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0, \qquad \text{OK.}$$

Polynomin jakaminen tekijöihin

Polynomin jakaminen tekijöihin tarkoittaa sen esittämistä tulomuodossa. Miksi pitää jakaa tekijöihin? Syy: Saadaan nollakohdat selville ja polynomifunktion käyttäytyminen paremmin selville → kurssin loppuosa.

Lausekkeesta, joka on esitetty tulomuodossa, saadaan nollakohdat suoraan. *Keinot:* Erotetaan yhteinen tekijä, hyödynnetään binomikaavoja + Pascalin kolmiota ja polynomin jakokulmaa (myöhemmin).

Esimerkki Jaa tekijöihin

$$7x + 14 = 7(x+2)$$

Muista neliöiden erotus, edelliset tunnit.

$$x^2 - 8x = x(x-8)$$

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$$

$$18x^3 - 8x^2 = 2x^2(9x-4)$$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = \quad x^2(x-1) + (x-1)$$

Tarkastellaan löytyykö yhteisiä tekijöitä termeistä $x^2(x-1)$ ja $(x-1)$

$$= x^2(x-1) + 1 \cdot (x-1)$$

$$= (x^2+1) \cdot (x-1)$$

Tätä sanotaan ryhmittelyksi

Vastaavalla idealla, jaa tekijöihin lauseke $-2x + x^3 - 6 + 3x^2$. Siis

$$-2x + x^3 - 6 + 3x^2 = 1 \cdot x^3 + 3x^2 - 2x - 6$$

$$= x^2(x+3) - 2(x+3)$$

$$= (x^2-2)(x+3)$$

$$= \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x+3)$$

Muista neliöiden erotus:
$x^2 - 2 = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

Tarkastellaan vielä lopuksi polynomin jakamista jakokulmassa. Tätä harjoitellaan vielä lisää muilla kursseilla.

Esimerkki Jaa jakokulmassa $3647:7$ sekä → tehdään taululla.

$$(x-2) \div (x-1), \qquad (x^2-2x+1) \div (x-1)$$