NELIÖJUURI

POLYNOMIFUNKTIOT JA -YHTÄLÖT, MAA2

Määritelmä, neliöjuuri:

Luvun $a \in \mathbb{R}$ *neliöjuuri*, merkitään $\sqrt{a}$, on se $\overbrace{\textit{ei-negatiivinen}}^{\text{Tarkoittaa positiivista tai nollaa}}$ *luku*, jonka neliö (eli toiseen potenssiin korotettuna) on a. Siis

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a, \qquad \text{ja } \sqrt{a} > 0, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Lukua a sanotaan *juurrettavaksi*.

Koska a on erään luvun, jota merkitään $\sqrt{a}$:lla, neliö, niin se on positiivista tai nollaa (neliö on aina positiivista tai nolla). Niinpä juurrettavan, eli luvun a, pitää yleisesti olla ei-negatiivinen luku, siis positiivinen tai nolla.

Tämä on nelijuuren *määrittelyehto* (reaaliluvuille), joka takaa neliöjuuren olemassaolon!

Huomautus Myöhemmin laajennetaan neliöjuuri myös negatiivisille luvuille → vastauksena saadaan kompleksiluku.→ kurssi 12.

Esimerkki

a) $\sqrt{100} = 10$, sillä $10 \geq 0$ ja $10^2 = 100$,

b) $\sqrt{-100}$, ei määritelty reaaliluvuille (on kompleksiluvuille)

c) $-\sqrt{100} = -10$, huomaa miinuksen paikka (ulkopuolella),

d) $\sqrt{100} = \sqrt{10^2}$, mutta toisaalta

$\sqrt{100} = \sqrt{(-10)^2}$, nämä yhdistäen saadaan $\sqrt{100} = |10|$ ja yleisesti pätee tulos: $\sqrt{b^2} = |b|$. Tähän palataan.

Esimerkki Etsi määrittelyjoukko **a)** $\sqrt{x-3}$, **b)** $\sqrt{10+x}$, **c)** $\sqrt{|x|}$ ja ratkaise yhtälö **d)** $\sqrt{x-1} = 5$ (taululla)

Neliöjuuren laskusääntöjä

Lause, neliöjuuren neliö:

Olkoon $a \geq 0$. Tällöin $(\sqrt{a})^2 = a$.

Lause, neliön neliöjuuri:

Olkoon a mielivaltainen reaaliluku. Tällöin $\sqrt{a^2} = |a|$.

Esimerkki

a) $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3,$ $\quad$ $\left(\sqrt{6}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{6}\right)^2\right)^2 = 6^2 = 36.$

b) $\sqrt{4x^2} = \sqrt{(2x)^2} = |2x| = 2|x|$

c) $\sqrt{16x^4} = \sqrt{(4x^2)^2} = |4x^2| = 4x^2$ MIKSI?

d) Onko $\sqrt{(-8)^2} = -8$?

Vastaus: Ei ole, neliöjuuren arvo ei voi olla negatiivista.

Lause, tulon ja osamäärän neliöjuuret:
Tulon neliöjuuri on tekijöiden neliöjuurien tulo, siis

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \qquad a, b \geq 0.$$

Osamäärän neliöjuuri on jaettavan neliöjuuri jaettuna jakajan neliöjuurella. siis

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \qquad a, b \geq 0 \text{ ja } b \neq 0.$$

Esimerkki Sievennä $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$.

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = \sqrt{a}\sqrt{a} + \sqrt{a}\sqrt{b} - \sqrt{b}\sqrt{a} - \sqrt{b}\sqrt{b} = a - b.$$

Yleisesti pätee $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$, tarkemmin 2.-kurssilla.

Esimerkki **a)** $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{\frac{7}{4}} = \underbrace{\sqrt{16}}_{=4} \cdot \sqrt{\frac{7}{4}} = \sqrt{16 \cdot \frac{7}{4}} = \sqrt{28}$

c) $\sqrt{\left(2 - \sqrt{7}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{7}\right| = \sqrt{7} - 2$ $\quad$ sillä $\sqrt{7} \approx 2{,}6458 > 2$

d) $\frac{a-3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(a-3)}{3} = \frac{\sqrt{3}a - 3\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ (TAPA: nimittäjässä ei neliöjuurta)

e) $\sqrt{\frac{\sqrt{16}+12}{9}} = \sqrt{\frac{4+12}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

Esimerkki Neliöjuuren määrittäminen käsin.

NELIÖYHTÄLÖ

POLYNOMIFUNKTIOT JA -YHTÄLÖT, MAA2

Esimerkki Ratkaise yhtälö (algebrallisesti)

a) $x^2 = 9$ **b)** $x^2 = 17$ **c)** $x^2 = 0$ **d)** $x^2 = -9$ **e)** $x^2 = a$

Ratkaisut

a) Koska toinen potenssi ja neliöjuuri ovat toisillensa käänteisiä laskutoimituksia, hyödynnetään neliöjuurta, siis

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$$

Huomaa, että nyt korostuu se miksi pitää ottaa itseisarvo.

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

$$|x| = 3$$

Muista itseisarvo etäisyystulkintana!

$$x = \pm 3$$

Tarkistus Koska $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ ja toisaalta $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$, niin asia selvä. Löytyi kaksi ratkaisua!

Olisiko ratkaisujen lukumäärällä mitään tekemistä eksponentin 2 kanssa?

Ratkaisut (jatkuu)

b) Sama idea, siis

$$x^2 = 17 \quad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{17}$$

Huomaa nyt, että $\sqrt{17}$ on tarkka arvo! Älä käytä desimaalilukuja (varsinkaan irrationaaliluvuilla laskiessasi)!

$$|x| = \sqrt{17}$$

$$x = \pm\sqrt{17}$$

Tarkistus Koska $\left(\sqrt{17}\right)^2 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 17$ ja toisaalta pätee myös $\left(-\sqrt{17}\right)^2 = \left(-\sqrt{17}\right) \cdot \left(-\sqrt{17}\right) = 17$, joten OK. Jälleen kaksi ratkaisua!

c) Nyt havaitaan, että nolla on ainoa ratkaisu, siis

$$x^2 = 0 \quad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{0}$$

$$|x| = 0$$

Muista, nolla ei negatiivinen eikä positiivinen!

$$x = \pm 0 = 0$$

Vain yksi ratkaisu?!

Ratkaisut (jatkuu)
d) Negatiivinen luku ei ole koskaan minkään (reaalisen) luvun neliö, eli

$$x^2 = -9, \qquad \text{ei ratk.}$$

Voidaan myös merkitä

$$x^2 = -9, \qquad x \notin \mathbb{R} \ \text{ tai } \ x \in \mathbb{C}.$$

Asiaa voisi tarkastella laajemminkin, mutta todetaan ratkaisun olevan kompleksiluku $x = \pm 3i$. Itse asiassa saatiin 2 ratkaisua! Mikä on i?

e) Yleisesti siis pätee

Jos termin x^2 edessä on kerroin, eli $cx^2 = a$, niin ensin jaetaan normaalisti luku a luvulla c. Saadaan

$$x^2 = \frac{a}{c}$$

$$x^2 = a \qquad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$$

$$|x| = a$$

$$x = \pm a$$

kunhan a on ei-negatiivinen.
Mutta entäpä ratkaisujen lukumäärä! Onko niitä kaksi, yksi vai nolla? Neliöyhtälöllä on aina kaksi ratkaisua. Nollaa sanotaan kaksinkertaiseksi ratkaisuksi ja negatiivisilla luvuilla on kaksi kompleksilukuratkaisua!

Edellä käytyä ratkaisumenetelmää sanotaan *algebralliseksi* ratkaisutavaksi. Neliöyhtälö voidaan ratkaista myös *graafisesti*. Graafinen ratkaisua on **aina** epätarkka (vaikka miten hyvän ja tarkan graafin piirtäisi) ja siksi olisi hyvä antaa vastaus likiarvomerkkiä käyttäen, esim. $x \approx 1{,}2$.

Esimerkki Ratkaise samat yhtälöt (graafisesti)

a) $x^2 = 9$ **b)** $x^2 = 17$ **d)** $x^2 = -9$

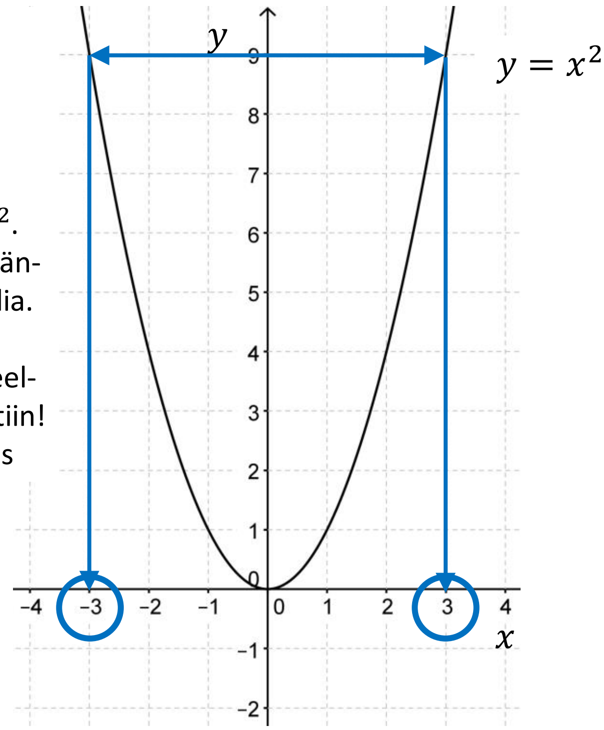
Ratkaisut
a) Piirretään kuvaaja eli graafi $y = x^2$ (seuraava dia) ja lähdetään y-akseliarvosta 9 liikkeelle vaakasuuntaisesti kohti käyrää $y = x^2$. Kun kohdataan käyrä, tehdään 90-asteen käännös ja liikutaan kohti x-akselia. Saatu x-arvo on ratkaisu.
Huom. Kun lähdetään liikkeelle y-akseliarvosta, niin pitää lähteä liikkeelle molempiin suuntiin.

Ratkaise yhtälö

a) $x^2 = 9$

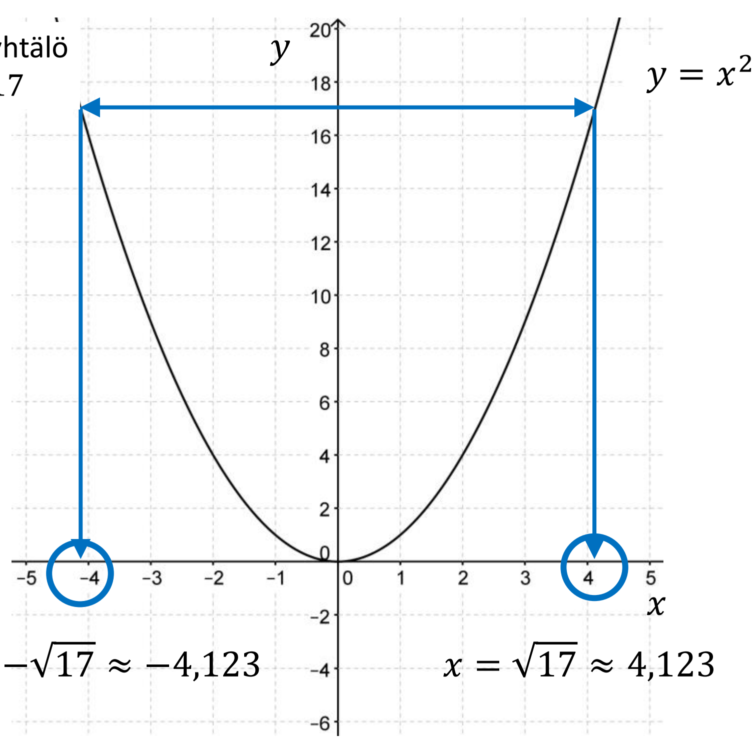
Ratkaisuvaiheet:

1. Piirretään käyrä.
2. Arvosta 9 liikkeelle kohti käyrää $y = x^2$.
3. Sitten 90 asteen käännös ja kohti x-akselia.
4. Ratkaisu on 3.
5. Muista lähteä liikkeelle molempiin suuntiin!
   → ratkaisu -3 myös



Ratkaise yhtälö

b) $x^2 = 17$



$x = -\sqrt{17} \approx -4{,}123$ $\qquad$ $x = \sqrt{17} \approx 4{,}123$

Ratkaise yhtälö
d) $x^2 = -9$

Nyt havaitaan, ettei käyrää koskaan kohdata, eli ei ratkaisua!