Toisen asteen polynomifunktio

Kertausta

Määritelmä, polynomifunktion perusmuoto:

Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+ = \{1,2,3,\dots\}$. Astetta n olevan polynomifunktion P *perusmuoto* on

$$P\colon\ P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,,$$

missä $a_n \neq 0$.

Esimerkki Esitä perusmuodossa $P\colon\ P(x) = (x-3)(3x-4)^2(x+3)$.
Aluksi huomataan, että $(x-3)(3x-4)^2(x+3) = (x^2-9)(3x-4)^2$.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)(3x-4)^2(x+3) = (x^2-9)(3x-4)^2 \\ &= (x^2-9)(9x^2-24x+16) \\ &= 9x^4 - 24x^3 + 16x^2 - 81x^2 + 216x - 144 \\ &= 9x^4 - 24x^3 - 65x^2 + 216x - 144 \end{aligned}$$

Määritelmä, toisen asteen polynomifunktio – paraabeli:

Toisen asteen polynomifunktion $f\colon f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ kuvaaja on paraabeli

$$y = ax^2 + bx + c\,.$$

→ Geogebra (myös netissä)

Paraabelin ominaisuuksia:

- Kerroin a antaa aukeamissuunnan; jos $a < 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin ja jos $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.
- Kun $a \gg 1$ on iso, niin kapea paraabeli ja kun a pieni eli $0 < a \ll 1$, niin leveä paraabeli.
- Symmetrisyys huipun kautta kulkevan pystyakselin suuntaisen suoran suhteen.
- Nollakohtia 0,1 tai 2.
- Polynomifunktion suurin/pienin arvo saadaan siis huipussa.
- Vakiotermi c kertoo paraabelin käyrän ja pystyakselin leikkauspisteen.

Polynomien summa, erotus ja tulo

Polynomien yhteenlasku suoritetaan yhdistämällä samannimiset termit, eli termit, joilla sama aste.

Esimerkki 1 Kun $P(x) = 2x^2 - x + 4$ ja $Q(x) = -x^2 + 4x - 1$, niin

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^2 - x + 4) + (-x^2 + 4x - 1) \\ &= (2x^2 - x^2) + (-x + 4x) + (4 - 1) \\ &= x^2 + 3x + 3 \end{aligned}$$

Vastapolynomi saadaan muuttamalla *kaikkien* termien etumerkit, siis

$$-Q(x) = -(-x^2 + 4x - 1) = x^2 - 4x + 1\,.$$

Polynomien erotus (vastapolynomin summaus)

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (2x^2 - x + 4) - (-x^2 + 4x - 1) \\ &= (2x^2 + x^2) + (-x - 4x) + (4 + 1) \\ &= 3x^2 - 5x + 5 \end{aligned}$$

Polynomin kertominen polynomilla:

- hyödynnetään reaalilukujen laskulakeja ja
- kertominen termeittäin

Esimerkki 2 Kun $P(x) = 2x^2 - x + 4$ ja $Q(x) = -x^2 + 4x - 1$, niin

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2 - x + 4) \cdot (-x^2 + 4x - 1) \\ &= 2x^2 \cdot (-x^2) + 2x^2 \cdot (4x) + 2x^2 \cdot (-1) \\ &\quad -x \cdot (-x^2) - x \cdot (4x) - x \cdot (-1) \\ &\quad +4 \cdot (-x^2) + 4 \cdot (4x) + 4 \cdot (-1) \\ &= -2x^4 + 8x^3 - 2x^2 \\ &\quad +x^3 - 4x^2 + x \\ &\quad -4x^2 + 16x - 4 \\ &= -2x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 17x - 4 \end{aligned}$$

Polynomin jakaminen vakiolla: -termeittäin (osittelulain nojalla)

$$\frac{P(x)}{2} = \frac{2x^2 - x + 4}{2} = \frac{2x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{4}{2} = x^2 - \frac{1}{2}x + 2\,.$$

Ratkaise y yhtälöstä $x + 2y - 8 = 0$

$$\Longrightarrow\ x + 2y - 8 = 0 \ \Leftrightarrow\ 2y = -x + 8 \ \Leftrightarrow\ y = \frac{-x + 8}{2} \ \Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Esimerkki 3 (useita muuttujia)

$$-8ab^3(3a^2b^2 - 4ab - 5b^2) = -24a^3b^5 + 32a^2b^4 + 40ab^5$$

$$\begin{aligned}\left(y\sqrt{3} + 1\right)\left(2 + 4y\sqrt{3}\right) &= 2\sqrt{3}y + 12y^2 + 2 + 4\sqrt{3}y \\ &= 12y^2 + 6\sqrt{3}y + 2\end{aligned}$$