Polynomi – peruskäsitteet

Määritelmä, polynomi:

Muuttujan x *polynomi* on *summalauseke*, jonka yhteenlaskettavat ovat muotoa

$$ax^k, \qquad \text{missä } k \in \mathbb{N} \text{ ja } a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \,.$$

Yhteenlaskettavat merkkeineen ovat polynomin termejä. Vakiotermissä ei ole muuttujaa x (Tarkennus kohta!). Termin ax^k asteluku on k ja kerroin on a. Polynomin aste on termien asteista suurin.

Esimerkki Polynomin

$$7x^6 - 4x^3 + 2x^2 - 5$$

Termien kertoimet ovat: $7, -4, 2, -5$

muuttuja on x, termit ovat:

$$7x^6, \qquad -4x^3, \qquad 2x^2, \qquad -5,$$

joista -5 on vakiotermi. Siinä ei ole x:ää mukana…vai onko? Nimittäin muodossa $x^0 = 1$. Toisaalta jos $x = 0$, niin 0^0 ei ole määritelty. Termien asteluvut ovat: 6, 3 ja 2. Suurin näistä on 6, eli tämän polynomin asteluku on 6.

Monomissa on vain yksi termi: $5x, \quad \sqrt{\pi}x^{10}, \quad 0, \ldots$

Binomissa on kaksi termiä: $5x - 2, \quad a - x, \quad 5^2 - x^2, \ldots$

Trinomissa on kolme termiä: $x + y + z, \quad x^5 - 2x + 6, \ldots$

Määritelmä, polynomifunktio:

Funktiota, jonka lauseke voidaan esittää polynomina, siis

$$f\colon\ f(x) = ax^k + bx^l + cx^m + dx^n + \ldots\,,$$

sanotaan *polynomifunktioksi*. Kertoimille pätee: $a, b, c, d, \ldots \in \mathbb{R}$ ja $k, l, m, n, \ldots \in \mathbb{N}$. Eli lyhyesti polynomi = polynomifunktio.
Lisäksi nollannen asteen polynomia sanotaan (on) vakiopolynomiksi C, "constant" (eng. vakio).

Polynomifunktio, jota usein merkitään f:n sijaan isoilla P, Q, R, S, T kirjaimilla (pienillä), arvo kohdassa $x = x_0$ on luku $P(x_0)$, joka saadaan kun sijoitetaan lausekkeen $P(x)$ muuttujan paikalle luku x_0, siis

$$P(x_0) = a{x_0}^k + b{x_0}^l + c{x_0}^m + d{x_0}^n + \ldots$$

Esimerkki **a)** Polynomin $P(x) = -3x^2 + 2x + 6$ arvo kohdassa $x = 2$ on

$$P(2) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 6 = -12 + 4 + 6 = -2\,,$$

ja kohdassa $a - 1$, (a on **parametri, eli vakio joka voi saada eri arvoja**)

$$\begin{aligned} P(a-1) &= -3 \cdot (a-1)^2 + 2(a-1) + 6 \\ &= -3 \cdot (a^2 - 2a + 1) + 2a - 2 + 6 \\ &= -3a^2 + 6a - 3 + 2a - 2 + 6 \\ &= -3a^2 + 8a + 1 \end{aligned}$$

b) Polynomi

$$P(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

on kahden muuttujan polynomi (funktio).

c) Polynomin

$$P(t) = t^2 - 2t$$

muuttuja on t.

Siis, muuttujia voi olla useampi kuin yksi ja muuttujaa voidaan merkitä muullakin kirjaimella kuin x. Kirjain t on yleinen esim. fysiikassa t=time (aika).

1.asteen polynomifunktio

Yleisesti

Määritelmä, polynomifunktio:
Polynomifunktio on funktio, jonka lauseke on polynomi. (Eli suomeksi?)
Kun $n \in \mathbb{Z}_+$, niin n. asteen polynomifunktion P perusmuoto on

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,.$$

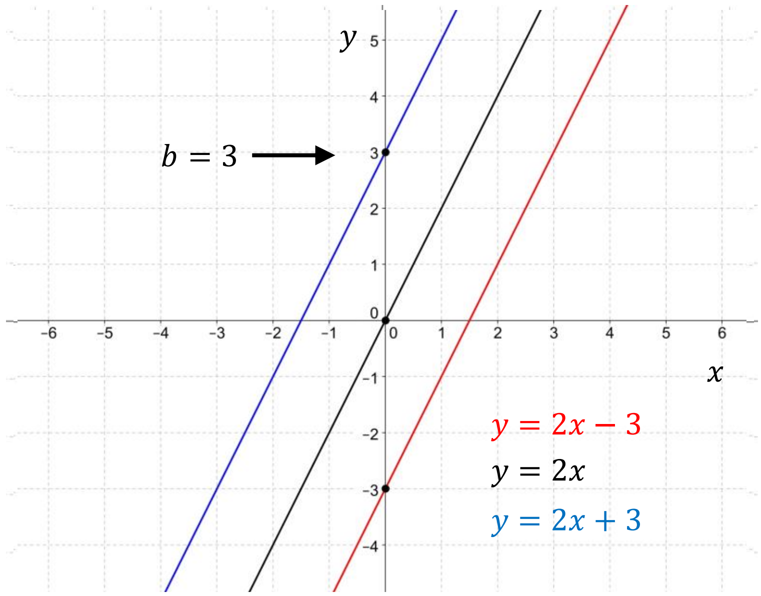
Määritelmä, 1.asteen polynomifunktio:
Lineaarinen eli 1. asteen polynomifunktio on

$$P(x) = kx + b, \qquad \text{missä } k, b \in \mathbb{R} \text{ ja } k \neq 0\,.$$

(lineaarinen=suora, suoran omainen)
Kerroin k on suoran kulmakerroin, kun $k \neq 0$. Kun $k > 0$ on funktio eli suora kasvava ja kun $k < 0$ vähenevä. Kun $k = 0$, suora on vaaka-akselin (usein x-akseli) suuntainen vakiosuora b.
Vakiotermi b antaa suoran ja pystyakselin (usein y-akseli) leikkauspisteen, siis $(0, b)$.

Esimerkki Piirrä funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon. Vertaa niiden keskinäistä sijaintia.

a) $f(x) = 2x - 3$, **b)** $f(x) = 2x$, **c)** $f(x) = 2x + 3$



Esimerkki Laske funktion f nollakohta, kun

a) $f(x) = -4x + 8$, **b)** $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, **c)** $f(x) = 0{,}3175x + 63{,}5$

a) Nyt siis $f(x) = -4x + 8$. Milloin $f(x) = 0$ eli $-4x + 8 = 0$?

$$-4x + 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 8 = 4x \quad \Longrightarrow \quad x = 2\,.$$

b) Nyt siis $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. Milloin $f(x) = 0$ eli $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$?

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x + 1}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}\,.$$

c) Nyt siis $f(x) = 0{,}3175x + 63{,}5$. Milloin $0{,}3175x + 63{,}5 = 0$?

$$0{,}3175x + 63{,}5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{63{,}5}{0{,}3175} \quad \Longrightarrow \quad x = -200\,.$$

Esimerkki Millä muuttujan x arvoilla funktio f saa positiivisia arvo-ja?

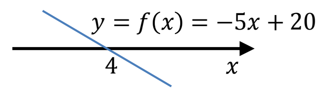
a) $f(x) = -5x + 20$ **b)** $f(x) = \frac{3}{4}x + 12$

a) Nyt kuvaaja on vähenevä suora (miksi?), joten f saa positiivisia arvo-ja kun

$$x < \text{nollakohta}\,.$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -5x + 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-20}{-5} = 4\,,$$

Siis, kun $x < -4$, niin $f(x) > 0$.



b) Nyt kuvaaja on kasvava suora , joten f saa positiivisia arvoja kun

$$x > \text{nollakohta}\,.$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{4}x + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-12}{\frac{3}{4}} = -\frac{48}{3} = -16\,,$$

Siis, kun $x > -16$, niin $f(x) > 0$.