Kompleksiluvut

POLYNOMIFUNKTIOT JA -YHTÄLÖT, MAA2

Vuonna 1545 Cardano (italialainen) ratkaisi yhtälön

$$x(10-x) = 40$$

kertomalla keskenään luvut $5+\sqrt{-15}$ ja $5-\sqrt{-15}$, jolloin

$$\Longrightarrow \quad 5^2-(-15) = 25+15 = 40, \qquad \text{OK},$$

Mutta mitä tarkoittaa luku $\sqrt{-15}$?

Lukujoukoista

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

kompleksilukujen joukko

$$\mathbb{C} = \{\, z = x+iy \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ ja } i \text{ on imaginaariyksikkö}\}$$

on laajin.

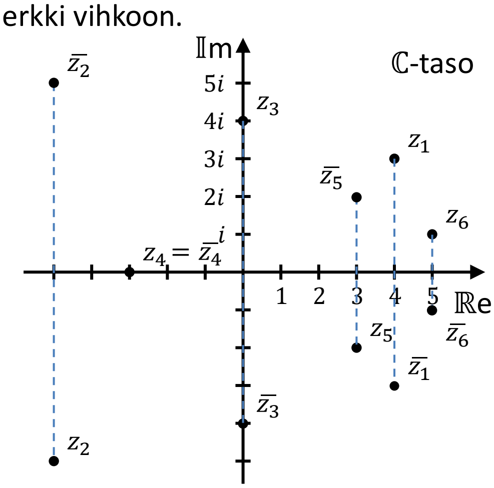
Kompleksiluvut ovat siis muotoa $z = x+iy$ (tai $z = x+yi$) ja puhutaan $\mathbb{C}$-tasosta, joka samaistetaan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-tasoon, sillä erotuksella, että $\mathbb{C}$-tasossa on ns. kompleksinen struktuuri (rakenne) $i^2 = -1$.

Lisäksi käytössä ei ole x- ja y- koordinaatit kuten $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-tasossa, vaan reaaliosa (”x”) ja imaginaariosa (”y”). Usein kuitenkin puhutaan x- ja y- koordinaateista. Seuraava esimerkki vihkoon.

Esimerkki Olkoot

$$\begin{aligned}
z_1 &= 4 + 3i \\
z_2 &= -5 - 5i \\
z_3 &= 4i \\
z_4 &= -3 \\
z_5 &= 3 - 2i \\
z_6 &= 5 + i
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}$e-osat (”x”) $\quad$ $\mathbb{I}$m-osat (”y”)



Tällöin ns. liittoluvut (miksi → syy selviää) ovat:

$$\overline{z_1} = 4-3i, \qquad \overline{z_2} = -5+5i, \qquad \overline{z_3} = -4i, \qquad \overline{z_4} = -3, \ldots$$

Toisin sanoen liittoluvut ovat peilikuvia $\mathbb{R}$e-akselin suhteen ja vaikutus on siis $\mathbb{I}$m-osan etumerkin vaihtuminen. Yleisesti, jos $z = x + iy$, niin $\bar{z} = x - iy$.

Yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku:
Hyvin suoraviivaista.

Esimerkki $z_1 + z_2 = (4+3i) + (-5-5i) = -1 - 2i$

$$z_6 - z_5 = (5 - i) - (3 - 2i) = 2 + i$$

Siis yhteen- ja vähennyslaskuissa reaaliosat keskenään, samoin imaginaariosat keskenään.

$$\begin{aligned} z_5 \cdot z_1 = (3-2i)(4+3i) &= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3i - 2i \cdot 4 - 2i \cdot 3i \\ &= 12 + 9i - 8i - 6i^2 \\ &= 12 + 6 - i \\ &= 18 - i \end{aligned}$$

Muista
$i^2 = -1$

$$z_2 \cdot \overline{z_3} = (-5-5i) \cdot (-4i) = 20i + 20i^2 = -20 + 20i$$

Entäpä

$$\frac{z_1}{z_6} = \frac{4+3i}{5-i} \quad ?$$

Ongelmana näyttäisi olevan nimittäjässä oleva i. Hyödynnetään neliöiden erotusta.

Siis

$$\frac{z_1}{z_6} = \frac{4+3i}{5-i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{20+15i+4i-3}{25-5i+5i+1} = \frac{17+19i}{26}$$

$$= \frac{17}{26} + \frac{19}{26} i$$

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{4i}{-5-5i} = \frac{4i \cdot (-5+5i)}{(-5-5i)(-5+5i)} = \frac{-20i-20}{25-25i+25i+25}$$

$$= \frac{-20-20i}{50} = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5} i$$

Tehtäviä: Sijoita kompleksiluvut z_i $\mathbb{C}$-tasoon ja määritä liittoluvut $\overline{z_i}$ (sijoita myös ne $\mathbb{C}$-tasoon).

$z_1 = 3 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$, $z_3 = -4 + 2i$, $z_4 = 5 - 4i$,

$z_5 = -2i$, $z_6 = -3 - 7i$, $z_7 = 6$, $z_8 = i$

Laske $z_1 + z_4$, $z_6 - \overline{z_2}$,

$z_3 \cdot z_7$, $z_2 \cdot \overline{z_6}$,

$\frac{z_1}{z_3}$, $\frac{z_5}{\overline{z_4}}$,

${z_8}^3$

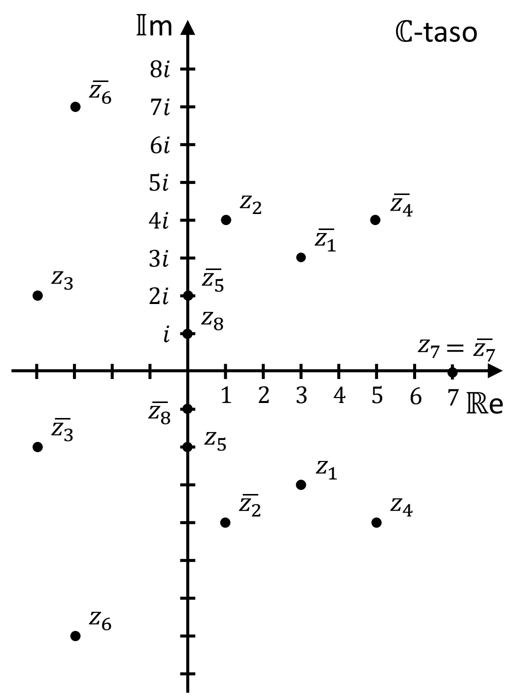
Mitä tarkoittaa tulos

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ ?} \qquad \text{esim. } z = 4 + 3i$$

Lisätehtäviä Sivulta 153 tehtävät 1 – 4 (jos ehtii tehdä yllä olevat.)

Ratkaisut:

$z_1 = 3 - 3i$	$\overline{z_1} = 3 + 3i$
$z_2 = 1 + 4i$	$\overline{z_2} = 1 - 4i$
$z_3 = -4 + 2i$	$\overline{z_3} = -4 - 2i$
$z_4 = 5 - 4i$	$\overline{z_4} = 5 + 4i$
$z_5 = -2i$	$\overline{z_5} = +2i$
$z_6 = -3 - 7i$	$\overline{z_6} = -3 + 7i$
$z_7 = 6$	$\overline{z_7} = 6$
$z_8 = i$	$\overline{z_8} = -i$



Laske

$$z_1 + z_4 = (3-3i) + (5-4i) = 8 - 7i$$

$$z_6 - \overline{z_2} = (-3-7i) - (1-4i) = -4 - 3i$$

$$z_3 \cdot z_7 = (-4+2i) \cdot 6 = -24 + 12i$$

$$z_2 \cdot \overline{z_6} = (1+4i) \cdot (-3+7i) = -3 + 7i - 12i - 28$$

$$= -31 - 5i$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{3-3i}{-4+2i} = \frac{(3-3i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)} = \frac{-12-6i+12i-6}{16+8i-8i+4}$$

$$= \frac{-18+6i}{20} = -\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i$$

$$\frac{z_5}{\overline{z_4}} = \frac{-2i}{5+4i} = \frac{-2i(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)} = \frac{-10i-8}{25+16} = -\frac{8}{41} - \frac{10}{41}i$$

$${z_8}^3 = i^3 = i \cdot i \cdot i = -i$$

Mitä tarkoittaa tulos

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \; ? \qquad \text{esim.}\, z = 4 + 3i$$

Se tarkoittaa kompleksiluvun z etäisyyden neliötä. Siis ”pituus” origosta korotettuna toiseen potenssiin.

Lasku antaa

$$z \cdot \bar{z} = (4+3i)(4-3i)$$

$$= 16 - 12i + 12i + 9$$

$$= 25 = 5^2 = |z|^2$$