POLYNOMIFUNKTIOT JA -YHTÄLÖT, MAA2

Pascalin kolmio ja yhteys binomin potensseihin sekä binomikertoimeen

Pascalin kolmioksi sanotaan luvuista muodostettavaa kolmiota, joka muodostetaan seuraavasti:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Pascalin kolmion luvuista havaitaan, että ne muodostuvat aina ylemmistä luvuista laskemalla ne yhteen. Siis esimerkiksi 4. rivillä luku 4 on $1+3$ tai $3+1$ ja vastaavasti luku 6 on $3+3$. Katso kuva vieressä (selitys rivien numeroitiin alla).

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Pascalin kolmion yhteys binomin eri potensseihin ja binomikertoimeen. Tarkastellaan ensin binomin eri potensseja:

$$(a+b)^0 = \mathbf{1}$$

$$(a+b)^1 = \mathbf{1} \cdot a + \mathbf{1} \cdot b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = \mathbf{1}\cdot a^2 + \mathbf{2}\cdot ab + \mathbf{1}\cdot b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\\ &= \left(a^2+2ab+b^2\right)\cdot(a+b)\\ &= \mathbf{1}\cdot a^3 + \mathbf{3}\cdot a^2b + \mathbf{3}\cdot ab^2 + \mathbf{1}\cdot b^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1\\
&&&&&&\vdots&&&&&&
\end{array}$$

Ja havaitaan, että lausekkeen termien kertoimet noudattavat Pascalin kolmion lukuja. Potenssi viittaa riviin ylhäältä lukien, kun otetaan ns. ”nollasrivi” käyttöön.

Miten sitten esimerkiksi lauseketta

$$(a+b)^8$$

lähdetään muodostamaan? Aluksi

$$(a+b)^8 = a^8$$

sitten Pascalin kolmiota hyödyntäen ja a:aan potenssia yhdellä pudottaen ja samalla b:een potenssia yhdellä korottaen

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b^1 \ldots$$

Itse asiassa b:een potenssit lähtee nollasta, muista $x^0 = 1$ aina kun $x \neq 0$, eli

$$(a+b)^8 = a^8b^0 + 8a^7b^1 \ldots$$

Loppu on vastaavasti

$$(a+b)^8 = a^8b^0 + 8a^7b^1 \ldots 8a^1b^7 + a^0b^8$$

Binomikerroin määritellään kertoman kautta seuraavasti

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot (n-k)}, \qquad \text{missä } k \le n.$$

Nyt esimerkiksi binomikerroin antaa binomin $(a+b)^8$ kertoimet mukavasti. Eli tällöin $n=8$ ja k saa arvoja $0-8$. Muista: määritelmän nojalla $0! = 1$.

$$\binom{8}{0} = \frac{8!}{0!\,(8-0)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot 8}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot 8} = 1$$
$$\binom{8}{1} = \frac{8!}{1!\,(8-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot 8}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot 7} = 8$$
$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot 8}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot 6} = 28$$
$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 56$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 70$$
$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 56$$

ja niin edelleen.

Havaitaan tietty symmetrisyys, eli $\binom{8}{0} = \binom{8}{8}$ ja $\binom{8}{1} = \binom{8}{7}$ jne. Havaitsetko tämän symmetrisyyden Pascalin kolmiosta? Laskimessa binomikerroin on merkkinä nCr, eli näppäile 8 nCr 2 ja saat vastaukseksi 28. MAOL:ssa Pascalin kolmio on sivulla 60 (vuoden 2005 painos). Entäpä tapaus

$$(a-b)^8 \qquad \text{mitä miinus saa aikaan?}$$