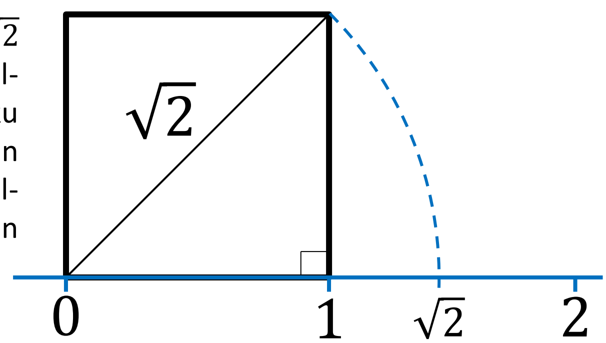
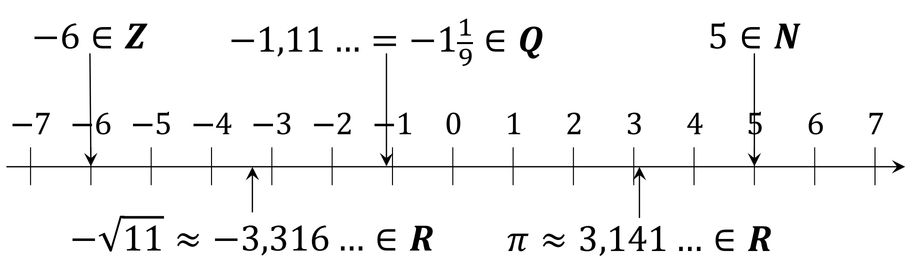
Reaalinen lukualue

Millainen on luku, jossa on *päättymätön* ja *jaksoton* desimaalikehitelmä? Onko sellaisia?
Tarkastellaan Pythagoraan lauseesta saatavaa yksikköneliön lävistäjää, lukua $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$. Millainen on $\sqrt{2}$ lukuna? Onko se luonnollinen, kokonais- vai rationaalinen luku?

Mitä ilmeisemmin luku $\sqrt{2}$ ei ole ainakaan luonnollinen luku tai kokonaisluku (pituus näyttäisi olevan ykkösen ja kakkosen välillä). Entäpä rationaalinen luku?



Määritelmä, *Irrationaaliset luvut*:
Irrationaaliset luvut ovat lukuja, joiden desimaalikehitelmä on *päättymätön* ja *jaksoton*. Esim. $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\ldots$ on irrationaaliluku.
Määritelmä, *Reaaliset luvut*:
Reaalisten lukujen joukko $\boldsymbol{R}$ ($\mathbf{R}\text{eal numbers}$) muodostuu rationaali- ja irrationaaliluvuista. Reaaliluvut voidaan samaistaa lukusuoran pisteisiin eli jokaista reaalilukuja vastaa tietty yksikäsitteinen lukusuoran piste. Sanotaan, että reaaliluvut peittävät lukusuoran "aukottomasti".



Irrationaaliluvut, kuten $\sqrt{2}$ tai π, ovat tarkkoja ja täsmällisiä arvoja. *Irrat.luvuille voidaan muodostaa mielivaltaisen tarkkoja rationaalisia likiarvoja, joiden avulla määritetään laskutoimitukset irrat.luvuille!*

Lause eli teoreema (Theorem), *reaalilukujen laskulakeja*:

1. Yhteenlaskun vaihdantalaki $a+b=b+a$
2. Kertolaskun vaihdantalaki $ab=ba$
3. Osittelulaki $a(b+c)=ab+ac$
4. Yhteenlaskun liitäntälaki $a+(b+c)=(a+b)+c$
5. Kertolaskun liitäntälaki $a(bc)=(ab)c.$
6. Tulon nollasääntö $ab=0$ joss $a=0$ tai $b=0$

joss = jos ja vain jos (yleinen lyh.)

Eli täysin samat kuin rationaalilukujen! Liitäntälain nojalla summa ja tulo merkitään ilman sulkuja, siis

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$$
$$a(bc)=(ab)c=abc$$

Määritelmä, *vasta- ja käänteisluku*:
Reaaliluvun a ja sen *vastaluvun* $-a$ summa on nolla

$$a+(-a)=0.$$

Sanotaan, että nolla on yhteenlaskun *neutraalialkio.* Nollan lisäämisellä ei ole vaikutusta reaalilukuun a: $a+0=a.$

Reaaliluvun a $(a \neq 0)$ ja sen *käänteisluvun* $\frac{1}{a}$ tulo on yksi

$$a \cdot \frac{1}{a}=1.$$

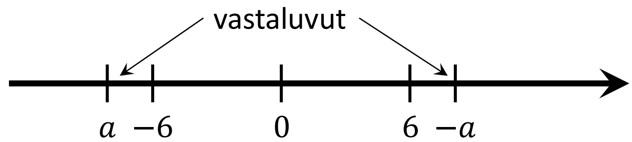
Sanotaan, että ykkönen on kertolaskun *neutraalialkio.* Ykkösen kertomisella ei ole vaikutusta reaalilukuun a: $a \cdot 1=a.$

Esimerkki 1:
a) Luvun -6 vastaluku on 6, koska $(-6)+6=0$. Muista: $-(-6)=6$.

b) Luvun $\frac{6}{17\cdot\pi}$ käänteisluku on $\frac{17\cdot\pi}{6}$, koska $\frac{6}{17\cdot\pi}\cdot\frac{17\cdot\pi}{6}=1.$

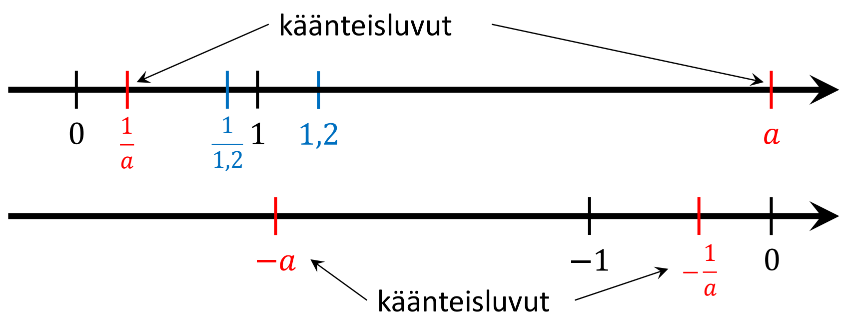
Muista: $\frac{1}{\frac{6}{17\cdot\pi}}=\frac{17\cdot\pi}{6}.$

Lause, *vastaluvun ominaisuuksia*:



1. Luvun vastaluvun vastaluku on luku itse $\quad -(-a) = a$
2. Summan vastaluku on vastalukujen summa $\quad -(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$
3. Vähennyslaskun määritelmä $\quad a - b = a + (-b)$
4. Tulon merkkisäännöt $\quad a(-b) = (-a)b = -ab$, $\quad (-a)(-b) = ab$
5. Erotus osittelulaissa $\quad a(b-c) = ab - ac$

Lause, *käänteisluvun ominaisuuksia*:

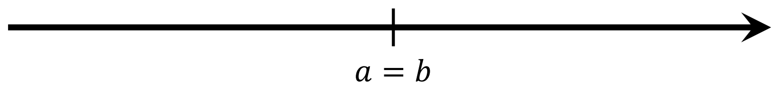


1. Nollasta eroavan luvun a käänteisluvun käänteisluku on luku itse $\quad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a, \quad a \neq 0$
2. Tulon ab käänteisluku on käänteislukujen tulo $\quad \frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

Reaalilukujen järjestys:
Kahdelle reaaliluvulle x ja y pätee täsmälleen yksi seuraavista kolmesta vaihtoehdosta:

1. $a < b$: Tällöin luku b on lukusuoralla luvun a oikealla puolella ja erotus $b - a > 0$ tai $a - b < 0$.

2. $a = b$: Tällöin luku b on sama luku kuin luku a ja lukusuoralla ne vastaavat samaa pistettä. Erotus $b - a = 0$.



3. $a > b$: Tällöin luku b on lukusuoralla luvun a vasemmalla puolella ja erotus $b - a < 0$ tai $a - b > 0$.

Vastalukujen järjestys kääntyy, eli $a > b$ jos ja vain jos $-a < -b$. Siis $7 > 5$ jos ja vain jos $-7 < -5$. Tämä on tosi, OK.

Lukusuoran välit: Niiden reaalilukujen joukko, jotka ovat

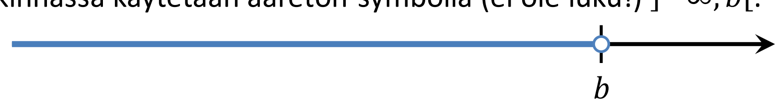
1. Suurempia tai yhtä suuria kuin a ja pienempi tai yhtä pieniä kuin b merkitään lukusuoralla (huomaa tummennetut päätypallot).

Kyseistä väliä merkitään myös kaksoisepäyhtälöllä $a \leq x \leq b$ tai välin merkinnällä $[a, b]$ eli $x \in [a, b]$.

2. Mikäli toinen pääty ei kuulu väliin, merkitään avonainen päätypallo.

Kaksoisepäyhtälömerkintänä $a < x \leq b$ ja välimerkintänä $]a, b]$.

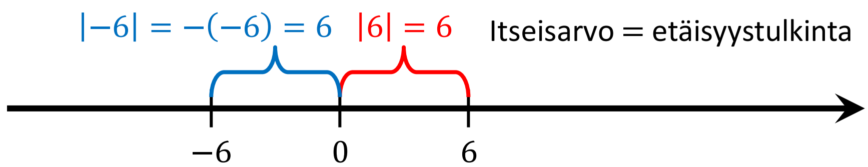
3. Mikäli tarkastellaan puoliääretöntä väliä, esim. $x < b$, niin välimerkinnässä käytetään ääretön-symbolia (ei ole luku!) $]-\infty, b[$.



Määritelmä, *itseisarvo*:
Reaaliluvun x *itseisarvo* $|x|$ ilmoittaa luvun *etäisyyden* origosta.

Positiivisen luvun itseisarvo on luku itse. Negatiivisen luvun itseisarvo on luvun vastaluku. Nollan itseisarvo on nolla. Eli

$$|x| = \overbrace{|x-0|}^{\text{etäisyys}} = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$



Esimerkki 2:

a) Luvun -6 itseisarvo $|-6| = -(-6) = 6$, koska $-6 < 0$.

b) Luvun 6 itseisarvo $|6| = 6$, koska $6 \geq 0$.

Esimerkki Sievennä **a)** $|2x+1|$ **b)** $\left|\sqrt{3}x - 2\right|$

a)

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{kun } 2x+1 \geq 0, \text{eli } 2x \geq -1 \text{ eli } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1), & \text{kun } 2x+1 < 0, \text{eli } 2x < -1 \text{eli } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

siis

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{kun } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1, & \text{kun } x < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

b)

$$\left|\sqrt{3}x-2\right| = \begin{cases} \sqrt{3}x-2, & \text{kun } \sqrt{3}x-2 \geq 0, \text{eli } \sqrt{3}x \geq 2 \text{ eli } x \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -(\sqrt{3}x-2), & \text{kun } \sqrt{3}x-2 < 0, \text{eli } \sqrt{3}x < 2 \text{ eli } x < \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

siis

$$\left|\sqrt{3}x-2\right| = \begin{cases} \sqrt{3}x-2, & \text{kun } x \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3}x+2, & \text{kun } x < \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Huomaatko mitä määritelmä sanoo?

Määritelmä, itseisarvo:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Siis

$$|\text{"jotain"}| = \begin{cases} \text{"jotain"}, & \text{kun se "jotain"} \geq 0, \\ -(\text{"jotain"}), & \text{kun se "jotain"} < 0. \end{cases}$$

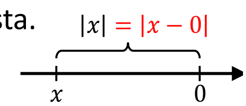
Esimerkki

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{kun } x-3 \geq 0, \text{eli kun } x \geq 3, \\ \underbrace{-(x-3)}_{=\,3-x}, & \text{kun } x-3 < 0, \text{eli kun } x < 3. \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{kun } x+3 \geq 0, \text{eli kun } x \geq -3, \\ \underbrace{-(x+3)}_{=\,-x-3}, & \text{kun } x+3 < 0, \text{eli kun } x < -3. \end{cases}$$

Itseisarvo etäisyytenä

Jos kutsutaan luvun x lukusuoralla olevaa vastinpistettä pisteeksi x, niin itseisarvo $|x|$ ilmoittaa pisteen etäisyyden origosta.



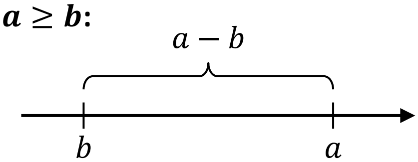
Esimerkki 1 **a)** Pisteen 3 etäisyys origosta on 3 ja vast. pisteen -4 etäisyys origosta on 4. **b)** Pisteen 5 etäisyys pisteestä 1 vast. -3 on $|5-1| = 4$ ja $|5-(-3)| = 8$.

Pisteiden a ja b välisen janan pituus eli pisteiden a ja b etäisyys on

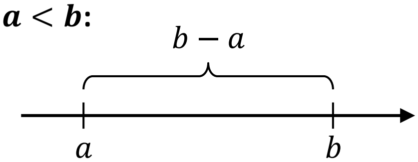
$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{kun } a-b \geq 0 \\ -(a-b), & \text{kun } a-b < 0 \end{cases},$$

$$= \begin{cases} a-b, & \text{kun } a-b \geq 0 \text{ eli kun } a \geq b \\ b-a, & \text{kun } a-b < 0 \text{ eli kun } a < b \end{cases}.$$

$\boldsymbol{a \geq b}$:



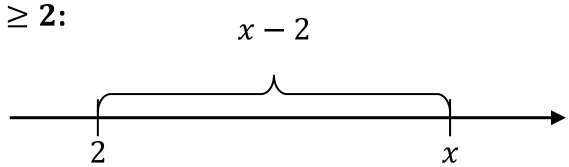
$\boldsymbol{a < b}$:



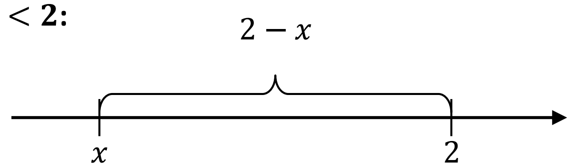
Esimerkki 2 Pisteiden x ja 2 välisen janan pituus on $|x-2|$.
Jos $x \geq 2$, niin janan pituus on $x-2$ ja jos $x < 2$, niin janan pituus on $2-x$, siis

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{kun } x-2 \geq 0, \text{eli kun } x \geq 2 \\ \underbrace{-(x-2)}_{=2-x}, & \text{kun } x-2 < 0, \text{eli kun } x < 2 \end{cases}.$$

$\boldsymbol{x \geq 2}$**:**

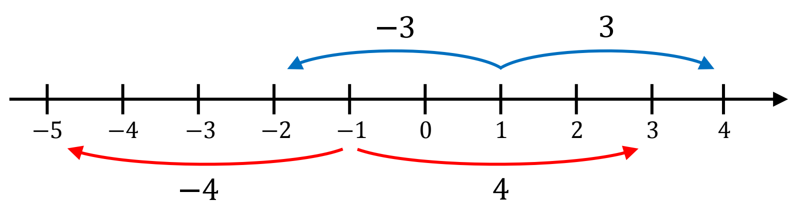


$\boldsymbol{x < 2}$**:**



Esimerkki 2 Määritä ne lukusuoran pisteet x, jotka ovat **a)** etäisyydellä 3 pisteestä 1 ja **b)** etäisyydellä 4 pisteestä -1.

a)

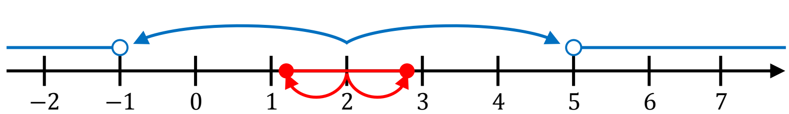


b)

a) Siis $|x-1| = 3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-1=3, & \text{kun } x \geq 1 \\ -(x-1) = 1-x = 3, & \text{kun } x < 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}.$

b) Siis $x-(-1) = 4$ tai $-\big(x-(-1)\big) = 4 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}.$

Esimerkki 3 Määritä ne lukusuoran pisteet x, joilla **a)** $|x-2| > 3$ ja **b)** $|x-2| \leq 0{,}8$. Huomaa onko yhtäsuuruus mukana vai ei!



a) $x > 5$ tai $x < -1$ **b)** $1{,}2 \leq x \leq 2{,}8$.

Yhtälöt ja epäyhtälöt

Yleistä

Määritelmä, lauseke:

Merkittyä laskutoimitusta, jossa on yksi tai useampi tuntematon (x, y, z, t, ...) tai pelkkää lukua sanotaan *lausekkeeksi*.

Esimerkki

$$x-2, \qquad 5x+\pi, \qquad \tfrac{1}{3}x^2-a+3, \qquad 18{,}4$$

Määritelmä, yhtälö:

Kun kaksi lauseketta asetetaan yhtäsuuruusmerkillä $=$ yhtäsuuriksi, saadaan *yhtälö*.

Esimerkki

$$5x-2=4x, \qquad \sqrt{3}x=x^2-1$$

Yhtälöt sisältävät muuttujan, usein x, ja sitä muuttujan x arvoa, joka toteuttaa yhtälön sanotaan yhtälön *ratkaisuksi* eli yhtälön *juureksi*.

Huomautus

Yleisesti muuttujina käytetään aakkosten loppupään kirjaimia $x, y, z, \ldots$ ja vakioina aakkosten alkupään kirjaimia $a, b, c, \ldots$. Toki poikkeuksia on.

Esimerkki

$$\begin{aligned} 5x-2&=4x, \qquad x=2 \text{ toteuttaa tämän yhtälön} \\ 5\cdot 2-2&=4\cdot 2 \\ 10-2&=8 \\ 8&=8 \end{aligned}$$

Identtisesti tosi –yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
Identtisesti epätosi –yhtälö ei toteudu millään muuttujan x arvoilla, $\nexists\ x \in \mathbb{R}$. Yleisesti käytössä olevat kvanttorit:

kaikilla, jokaisella = $\forall$ (eng. ”all”), on olemassa = $\exists$ (eng. ”exist”)

Yhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan kaikkien ratkaisujen etsimistä. Tällöin käytetään sieventämistä, nollan lisäämistä (esim. $+5-5$), ykkösellä kertomista (esim. $-2\cdot\frac{1}{(-2)}$), laskulakien käyttöä jne.

Esimerkki Ratkaise yhtälö $5x - 2 = 4x$.

$$5x - 2 = 4x \overset{|+2}{\Leftrightarrow} 5x\overbrace{-2+2}^{=0} = 4x + 2 \overset{|-4x}{\Leftrightarrow} x = 2$$

ekvivalenssinuoli

Useimmiten yhtälöt ratkaistaan allekkain laskemalla, siis

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= 4x \qquad\qquad | +2, -4x \\ 5x - 4x &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Molempia tapoja saa käyttää, suositus on ”allekkain” -menettelyllä.

Määritelmä, epäyhtälö:
Kun kahden lausekkeen väliin kirjoitetaan $<, >, \leq, \geq$ tai $\neq$, saadaan *epäyhtälö*.

Esimerkki

$$5x - 2 \geq 4x, \qquad \sqrt{3}x \neq x^2 - 1$$

Ensimmäisen asteen yhtälö

POLYNOMIFUNKTIOT JA -YHTÄLÖT, MAA2

Määritelmä:
Yhtälöä, joka on tai voidaan sieventää muotoon

$$ax + b = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0$$

sanotaan *lineaariseksi* eli ensimmäisen asteen yhtälöksi.
Lineaarinen = ”linearis”(lat.) = viivoista tehtyä. Yhtälön kuvaaja on suora, eli muuttujan x aste on yksi.

Ensimmäisen asteen yhtälö voidaan ratkaista kahdella tavalla:
- **algebrallisesti**, kirjan esimerkit (sievennykset jne.),
- **graafisesti**, kirjan esimerkit (piirretään suora → etsitään suoran ja x-akselin leikkauskohta).

Molemmat tavat pitää osata!

Esimerkki Ratkaise yhtälöt $-\frac{2x}{5} = \frac{3x}{4}$ ja $\frac{7x-2}{3} - \frac{7x+1}{2} = 0$. Tehdään algebrallisesti. Graafisesti koneella.
Palautetaan mieleen, että muotoa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ olevasta yhtälöstä päästään eteenpäin ”*ristiin kertomalla*”, siis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$, kun $b, d \neq 0$.

Tätä hyödyntäen saadaan:

$$-\frac{2x}{5} = \frac{3x}{4} \quad | \times$$

näin voidaan siis tehdä (miinuksen voi siirtää osoittajaan tai nimittäjään, mutta ei molempiin).

$$4 \cdot (-2x) = 5 \cdot 3x$$
$$-8x = 15x$$
$$0 = 23x$$
$$x = 0$$

Tapana on antaa vastaus muodossa $x =$jotain, eikä jotain $= x$, mutta ei väliä.

$$\frac{7x-2}{3} - \frac{7x+1}{2} = 0$$

$$\frac{7x-2}{3} = \frac{7x+1}{2} \quad | \times$$

Huom! Sulut, eli koko osoittaja pitää kertoa!

$$2 \cdot (7x-2) = 3 \cdot (7x+1)$$
$$14x - 4 = 21x + 3$$
$$-7x = 7 \quad | \div (-7)$$
$$x = -1$$