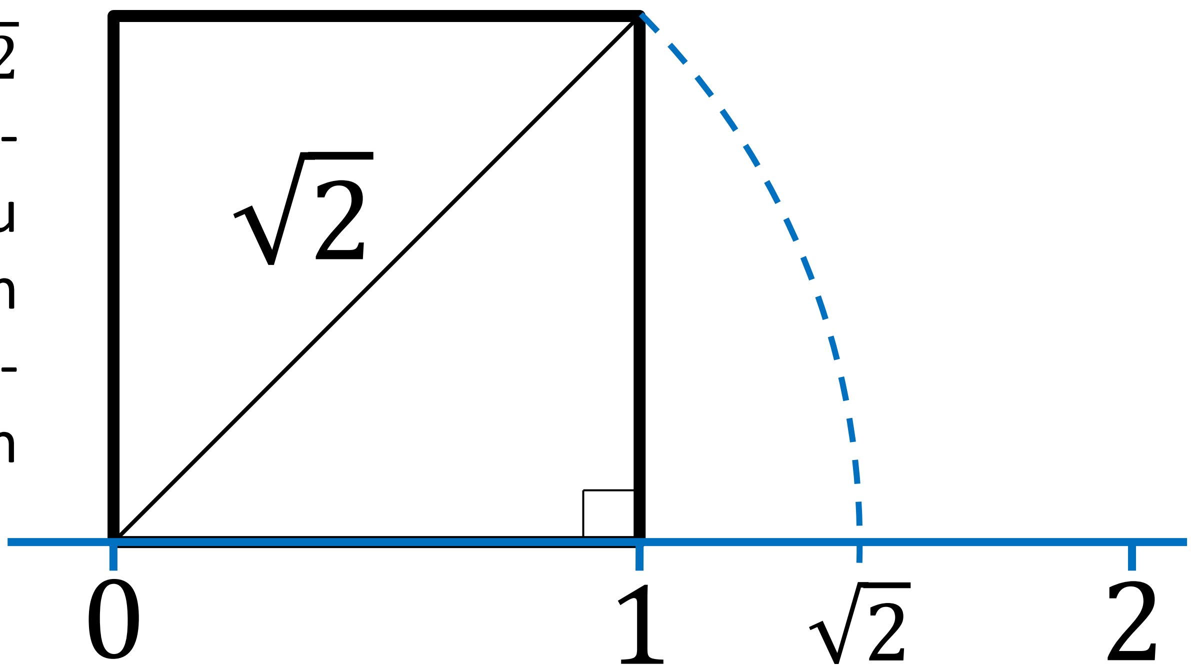
Reaalinen lukualue

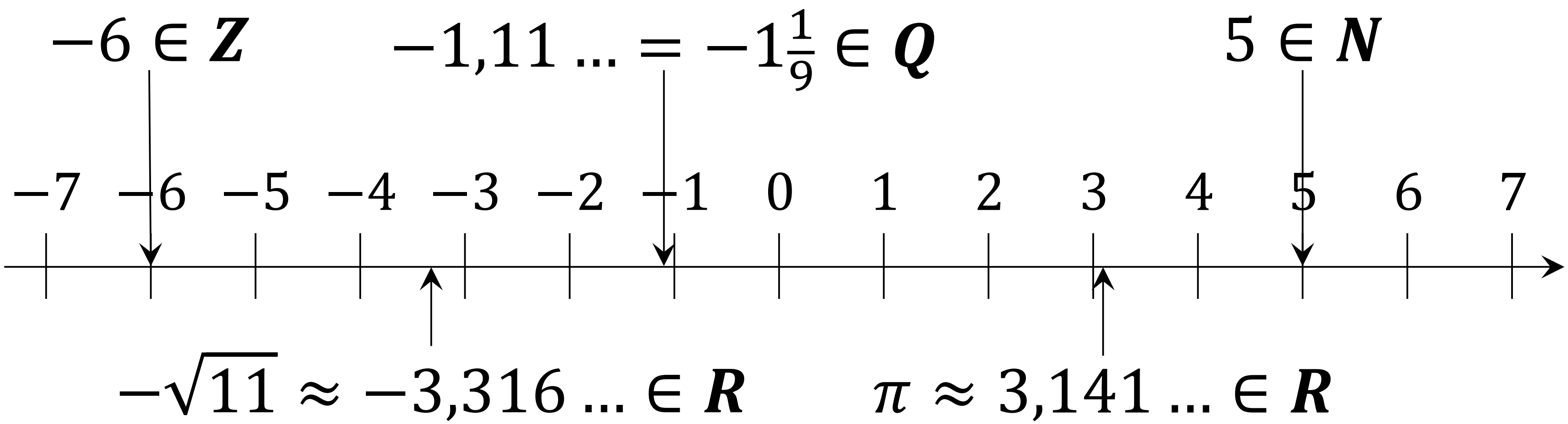
Millainen on luku, jossa on *päättymätön* ja *jaksoton* desimaalikehitelmä? Onko sellaisia?
Tarkastellaan Pythagoraan lauseesta saatavaa yksikköneliön lävistäjää, lukua $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$. Millainen on $\sqrt{2}$ lukuna? Onko se luonnollinen, kokonais- vai rationaalinen luku?

Mitä ilmeisemmin luku $\sqrt{2}$ ei ole ainakaan luonnollinen luku tai kokonaisluku (pituus näyttäisi olevan ykkösen ja kakkosen välillä). Entäpä rationaalinen luku?



Määritelmä, *Irrationaaliset luvut*:
Irrationaaliset luvut ovat lukuja, joiden desimaalikehitelmä on *päättymätön* ja *jaksoton*. Esim. $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\ldots$ on irrationaaliluku.

Määritelmä, *Reaaliset luvut*:
Reaalisten lukujen joukko $\boldsymbol{R}$ ($\mathbf{R}$eal numbers) muodostuu rationaali- ja irrationaaliluvuista. Reaaliluvut voidaan samaistaa lukusuoran pisteisiin eli jokaista reaalilukuja vastaa tietty yksikäsitteinen lukusuoran piste. Sanotaan, että reaaliluvut peittävät lukusuoran ”aukottomasti”.



Irrationaaliluvut, kuten $\sqrt{2}$ tai π, ovat tarkkoja ja täsmällisiä arvoja. *Irrat.luvuille voidaan muodostaa mielivaltaisen tarkkoja rationaalisia likiarvoja, joiden avulla määritetään laskutoimitukset irrat.luvuille!*

Lause eli teoreema (Theorem), *reaalilukujen laskulakeja*:

1. Yhteenlaskun vaihdantalaki $a+b=b+a$
2. Kertolaskun vaihdantalaki $ab=ba$
3. Osittelulaki $a(b+c)=ab+ac$
4. Yhteenlaskun liitäntälaki $a+(b+c)=(a+b)+c$
5. Kertolaskun liitäntälaki $a(bc)=(ab)c.$
6. Tulon nollasääntö $ab=0$ joss $a=0$ tai $b=0$

joss = jos ja vain jos (yleinen lyh.)

Eli täysin samat kuin rationaalilukujen! Liitäntälain nojalla summa ja tulo merkitään ilman sulkuja, siis

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$$

$$a(bc)=(ab)c=abc$$

Määritelmä, *vasta- ja käänteisluku*:

Reaaliluvun a ja sen *vastaluvun* $-a$ summa on nolla

$$a + (-a) = 0.$$

Sanotaan, että nolla on yhteenlaskun *neutraalialkio.* Nollan lisäämisellä ei ole vaikutusta reaalilukuun a: $a + 0 = a$.

Reaaliluvun a $(a \neq 0)$ ja sen *käänteisluvun* $\frac{1}{a}$ tulo on yksi

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Sanotaan, että ykkönen on kertolaskun *neutraalialkio.* Ykkösen kertomisella ei ole vaikutusta reaalilukuun a: $a \cdot 1 = a$.

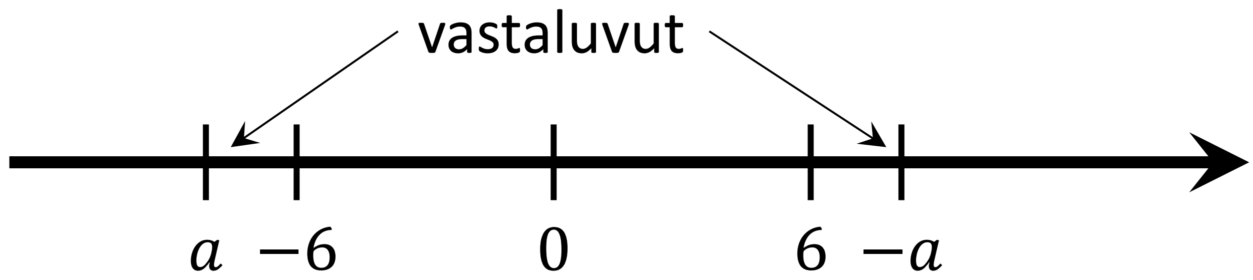
Esimerkki 1:

a) Luvun -6 vastaluku on 6, koska $(-6) + 6 = 0$. Muista: $-(-6) = 6$.

b) Luvun $\frac{6}{17 \cdot \pi}$ käänteisluku on $\frac{17 \cdot \pi}{6}$, koska $\frac{6}{17 \cdot \pi} \cdot \frac{17 \cdot \pi}{6} = 1$.

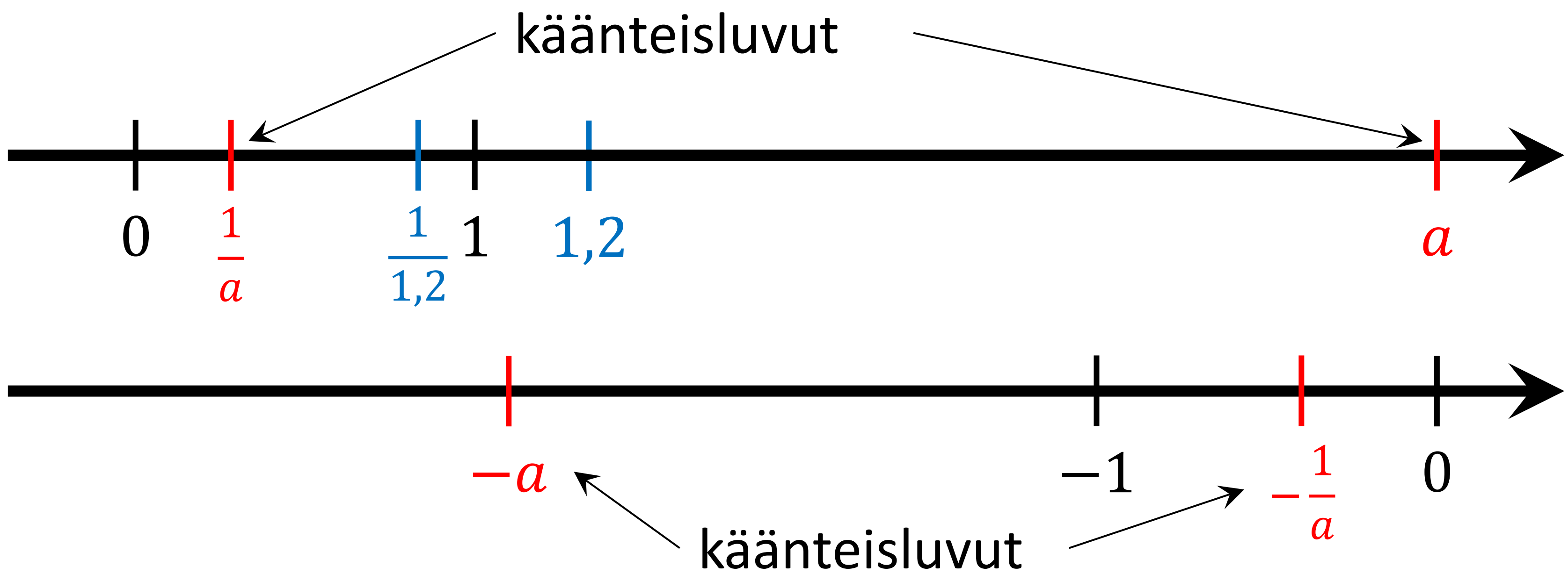
Muista: $\frac{1}{\frac{6}{17 \cdot \pi}} = \frac{17 \cdot \pi}{6}$.

Lause, *vastaluvun ominaisuuksia*:



1. Luvun vastaluvun vastaluku on luku itse $\qquad -(-a) = a$
2. Summan vastaluku on vasta-lukujen summa $\qquad -(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$
3. Vähennyslaskun määritelmä $\qquad a - b = a + (-b)$
4. Tulon merkkisäännöt $\qquad a(-b) = (-a)b = -ab$, $(-a)(-b) = ab$
5. Erotus osittelulaissa $\qquad a(b-c) = ab - ac$

Lause, *käänteisluvun ominaisuuksia*:



1. Nollasta eroavan luvun a käänteisluvun käänteisluku on luku itse $\qquad \dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a, \quad a \neq 0$

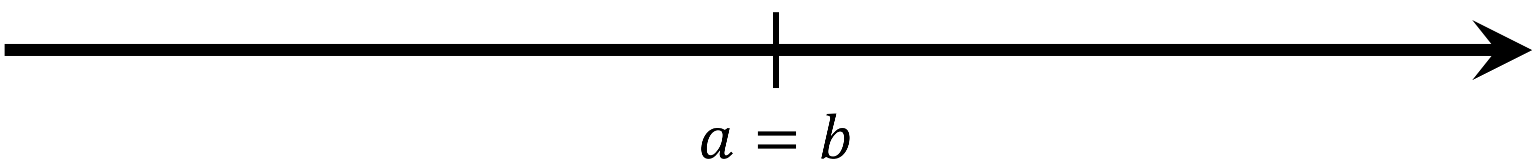
2. Tulon ab käänteisluku on käänteis-lukujen tulo $\qquad \dfrac{1}{a \cdot b} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}$

Reaalilukujen järjestys:

Kahdelle reaaliluvulle x ja y pätee täsmälleen yksi seuraavista kolmesta vaihtoehdosta:

1. $a < b$: Tällöin luku b on lukusuoralla luvun a oikealla puolella ja erotus $b - a > 0$ tai $a - b < 0$.

2. $a = b$: Tällöin luku b on sama luku kuin luku a ja lukusuoralla ne vastaavat samaa pistettä. Erotus $b - a = 0$.



3. $a > b$: Tällöin luku b on lukusuoralla luvun a vasemmalla puolella ja erotus $b - a < 0$ tai $a - b > 0$.

Vastalukujen järjestys kääntyy, eli $a > b$ jos ja vain jos $-a < -b$. Siis $7 > 5$ jos ja vain jos $-7 < -5$. Tämä on tosi, OK.

Lukusuoran välit: Niiden reaalilukujen joukko, jotka ovat

1. Suurempia tai yhtä suuria kuin a ja pienempi tai yhtä pieniä kuin b merkitään lukusuoralla (huomaa tummennetut päätypallot).

Kyseistä väliä merkitään myös kaksoisepäyhtälöllä $a \leq x \leq b$ tai välin merkinnällä $[a, b]$ eli $x \in [a, b]$.

2. Mikäli toinen pääty ei kuulu väliin, merkitään avonainen päätypallo.

Kaksoisepäyhtälömerkintänä $a < x \leq b$ ja välimerkintänä $]a, b]$.

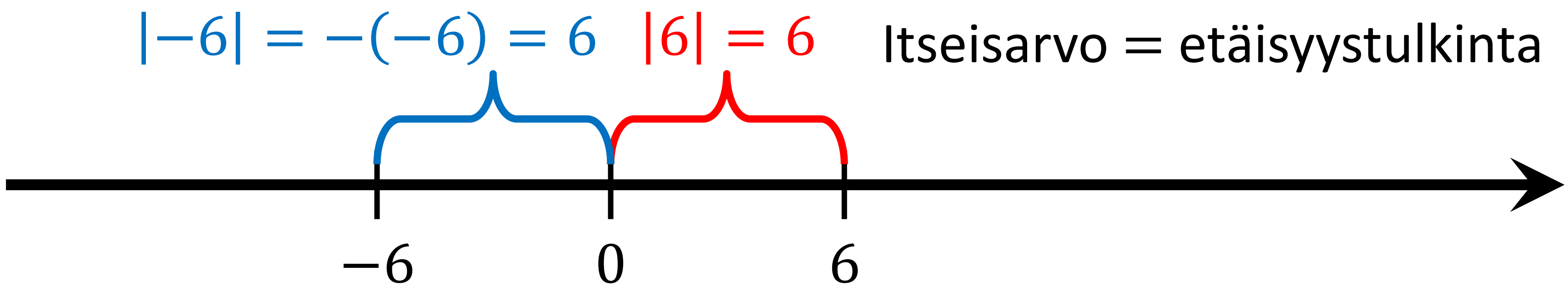
3. Mikäli tarkastellaan puoliääretöntä väliä, esim. $x < b$, niin välimerkinnässä käytetään ääretön-symbolia (ei ole luku!) $]-\infty, b[$.

Määritelmä, *itseisarvo*:

Reaalilukuvun x *itseisarvo* $|x|$ ilmoittaa luvun *etäisyyden* origosta.

Positiivisen luvun itseisarvo on luku itse. Negatiivisen luvun itseisarvo on luvun vastaluku. Nollan itseisarvo on nolla. Eli

$$|x| = \overbrace{|x-0|}^{\text{etäisyys}} = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$



Itseisarvo = etäisyystulkinta

Esimerkki 2:

a) Luvun -6 itseisarvo $|-6| = -(-6) = 6$, koska $-6 < 0$.

b) Luvun 6 itseisarvo $|6| = 6$, koska $6 \geq 0$.

Esimerkki Sievennä **a)** $|2x+1|$ **b)** $\left|\sqrt{3}x-2\right|$

a)

$$|2x+1|$$

$$= \begin{cases} 2x+1, & \text{kun } 2x+1 \geq 0, \text{eli } 2x \geq -1 \text{ eli } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1), & \text{kun } 2x+1 < 0, \text{eli } 2x < -1\text{eli } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

siis

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{kun } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1, & \text{kun } x < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

b)

$$\left|\sqrt{3}x-2\right| = \begin{cases} \sqrt{3}x-2, & \text{kun } \sqrt{3}x-2 \geq 0, \text{eli } \sqrt{3}x \geq 2 \text{ eli } x \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\left(\sqrt{3}x-2\right), & \text{kun } \sqrt{3}x-2 < 0, \text{eli } \sqrt{3}x < 2 \text{ eli } x < \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

siis

$$\left|\sqrt{3}x-2\right| = \begin{cases} \sqrt{3}x-2, & \text{kun } x \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3}x+2, & \text{kun } x < \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Huomaatko mitä määritelmä sanoo?

Määritelmä, itseisarvo:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Siis

$$|\text{"jotain"}| = \begin{cases} \text{"jotain"}, & \text{kun se "jotain"} \geq 0, \\ -(\text{"jotain"}), & \text{kun se "jotain"} < 0. \end{cases}$$

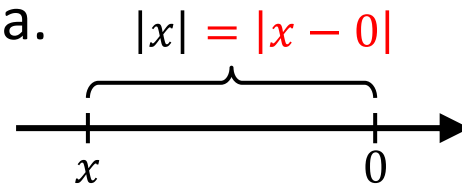
Esimerkki

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{kun } x-3 \geq 0, \text{eli kun } x \geq 3, \\ \underbrace{-(x-3)}_{=\,3-x}, & \text{kun } x-3 < 0, \text{eli kun } x < 3. \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{kun } x+3 \geq 0, \text{eli kun } x \geq -3, \\ \underbrace{-(x+3)}_{=\,-x-3}, & \text{kun } x+3 < 0, \text{eli kun } x < -3. \end{cases}$$

Itseisarvo etäisyytenä

Jos kutsutaan luvun x lukusuoralla olevaa vastinpistettä pisteeksi x, niin itseisarvo $|x|$ ilmoittaa pisteen etäisyyden origosta.



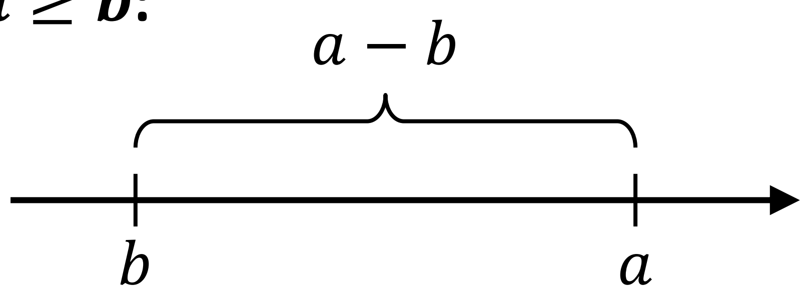
Esimerkki 1 **a)** Pisteen 3 etäisyys origosta on 3 ja vast. pisteen -4 etäisyys origosta on 4. **b)** Pisteen 5 etäisyys pisteestä 1 vast. -3 on $|5 - 1| = 4$ ja $|5 - (-3)| = 8$.

Pisteiden a ja b välisen janan pituus eli pisteiden a ja b etäisyys on

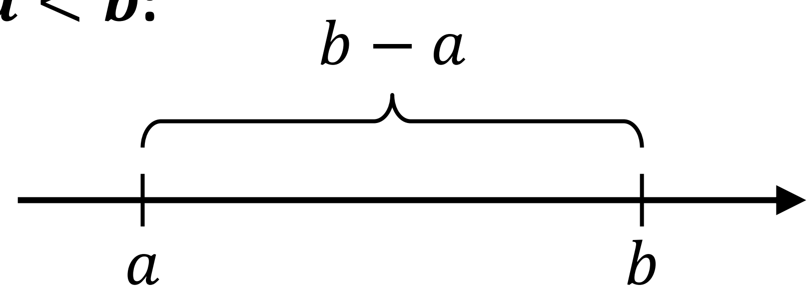
$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & \text{kun } a - b \geq 0 \\ -(a - b), & \text{kun } a - b < 0 \end{cases},$$

$$= \begin{cases} a - b, & \text{kun } a - b \geq 0 \text{ eli kun } a \geq b \\ b - a, & \text{kun } a - b < 0 \text{ eli kun } a < b \end{cases}.$$

$\boldsymbol{a \geq b}$**:**



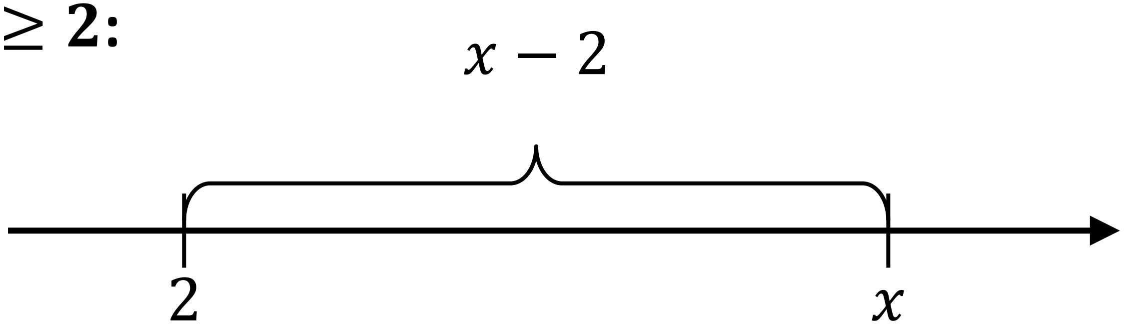
$\boldsymbol{a < b}$**:**



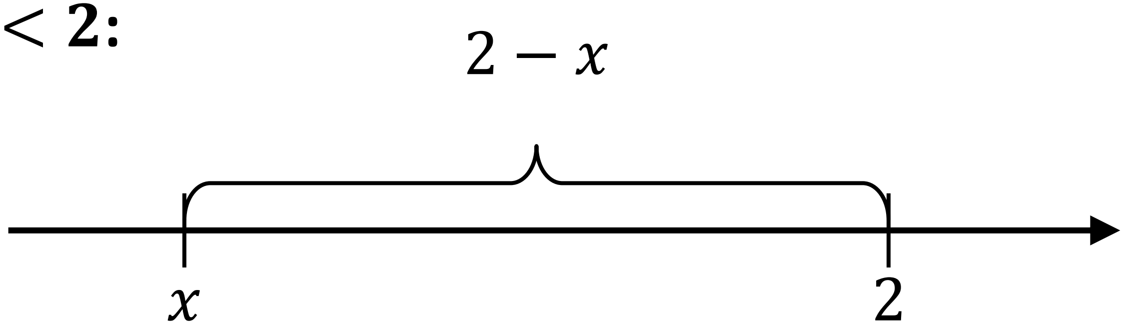
Esimerkki 2 Pisteiden x ja 2 välisen janan pituus on $|x-2|$.
Jos $x \geq 2$, niin janan pituus on $x-2$ ja jos $x < 2$, niin janan pituus on $2-x$, siis

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{kun } x-2 \geq 0, \text{eli kun } x \geq 2 \\ \underbrace{-(x-2)}_{=\,2-x}, & \text{kun } x-2 < 0, \text{eli kun } x < 2 \end{cases}.$$

$\boldsymbol{x \geq 2}$**:**

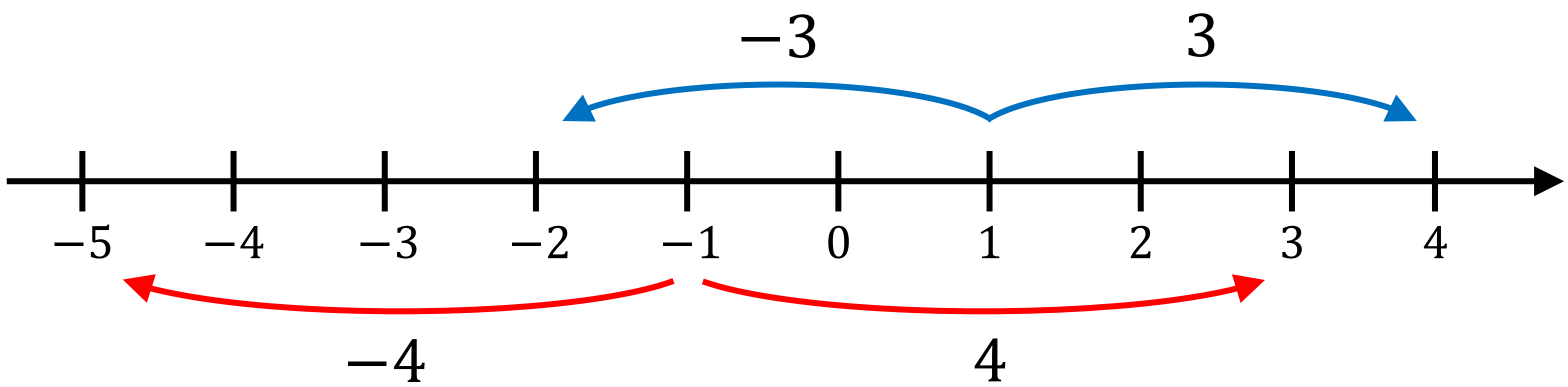


$\boldsymbol{x < 2}$**:**



Esimerkki 2 Määritä ne lukusuoran pisteet x, jotka ovat **a)** etäisyydellä 3 pisteestä 1 ja **b)** etäisyydellä 4 pisteestä -1.

a)

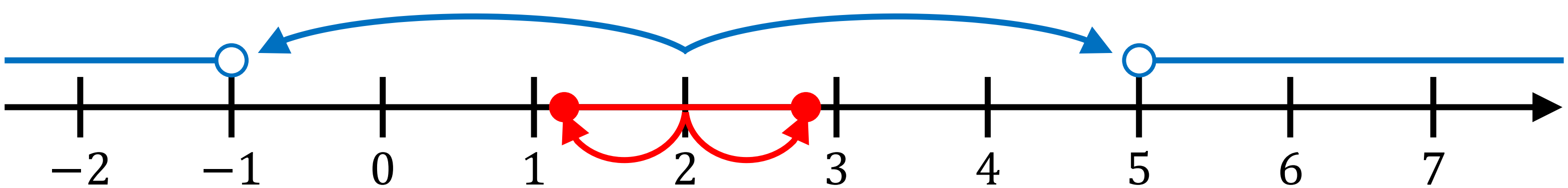


b)

a) Siis $|x-1| = 3 \implies \begin{cases} x-1=3, & \text{kun } x \geq 1 \\ -(x-1) = 1-x = 3, & \text{kun } x < 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}.$

b) Siis $x-(-1) = 4$ tai $-\big(x-(-1)\big) = 4 \implies \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}.$

Esimerkki 3 Määritä ne lukusuoran pisteet x, joilla **a)** $|x-2| > 3$ ja **b)** $|x-2| \leq 0{,}8$. Huomaa onko yhtäsuuruus mukana vai ei!



a) $x > 5$ tai $x < -1$ **b)** $1{,}2 \leq x \leq 2{,}8$.

Yhtälöt ja epäyhtälöt

Yleistä

Määritelmä, lauseke:

Merkittyä laskutoimitusta, jossa on yksi tai useampi tuntematon ($x, y, z, t, \ldots$) tai pelkkää lukua sanotaan *lausekkeeksi*.

Esimerkki

$$x - 2, \qquad 5x + \pi, \qquad \tfrac{1}{3}x^2 - a + 3, \qquad 18{,}4$$

Määritelmä, yhtälö:

Kun kaksi lauseketta asetetaan yhtäsuuruusmerkillä $=$ yhtäsuuriksi, saadaan *yhtälö*.

Esimerkki

$$5x - 2 = 4x, \qquad \sqrt{3}x = x^2 - 1$$

Yhtälöt sisältävät muuttujan, usein x, ja sitä muuttujan x arvoa, joka toteuttaa yhtälön sanotaan yhtälön *ratkaisuksi* eli yhtälön *juureksi*.

Huomautus
Yleisesti muuttujina käytetään aakkosten loppupään kirjaimia $x, y, z, \ldots$ ja vakioina aakkosten alkupään kirjaimia $a, b, c, \ldots$. Toki poikkeuksia on.

Esimerkki

$$5x - 2 = 4x, \qquad x = 2 \text{ toteuttaa tämän yhtälön}$$
$$5 \cdot 2 - 2 = 4 \cdot 2$$
$$10 - 2 = 8$$
$$8 = 8$$

Identtisesti tosi –yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. *Identtisesti epätosi* –yhtälö ei toteudu millään muuttujan x arvoilla, $\nexists\ x \in \mathbb{R}$. Yleisesti käytössä olevat kvanttorit:

kaikilla, jokaisella = ∀ (eng. ”all”), on olemassa = ∃ (eng. ”exist”)

Yhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan kaikkien ratkaisujen etsimistä. Tällöin käytetään sieventämistä, nollan lisäämistä (esim. $+5 - 5$), ykkösellä kertomista (esim. $-2 \cdot \frac{1}{(-2)}$), laskulakien käyttöä jne.

Esimerkki Ratkaise yhtälö $5x - 2 = 4x$.

$$5x - 2 = 4x \underbrace{\Leftrightarrow}^{|+2} 5x\overbrace{-2 + 2}^{=0} = 4x + 2 \underbrace{\Leftrightarrow}^{|-4x} x = 2$$

ekvivalenssinuoli

Useimmiten yhtälöt ratkaistaan allekkain laskemalla, siis

$$5x - 2 = 4x \qquad | + 2, -4x$$

$$5x - 4x = 2$$

$$x = 2$$

Molempia tapoja saa käyttää, suositus on ”allekkain” -menettelyllä.

Määritelmä, epäyhtälö:

Kun kahden lausekkeen väliin kirjoitetaan $<, >, \leq, \geq$ tai $\neq$, saadaan *epäyhtälö*.

Esimerkki

$$5x - 2 \geq 4x, \qquad \sqrt{3}x \neq x^2 - 1$$

Ensimmäisen asteen yhtälö

Määritelmä:

Yhtälöä, joka on tai voidaan sieventää muotoon

$$ax + b = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0$$

sanotaan *lineaariseksi* eli ensimmäisen asteen yhtälöksi.

Lineaarinen = ”linearis”(lat.) = viivoista tehtyä. Yhtälön kuvaaja on suora, eli muuttujan x aste on yksi.

Ensimmäisen asteen yhtälö voidaan ratkaista kahdella tavalla:

- **algebrallisesti**, kirjan esimerkit (sievennykset jne.),
- **graafisesti**, kirjan esimerkit (piirretään suora → etsitään suoran ja x-akselin leikkauskohta).

Molemmat tavat pitää osata!

Esimerkki Ratkaise yhtälöt $-\frac{2x}{5} = \frac{3x}{4}$ ja $\frac{7x-2}{3} - \frac{7x+1}{2} = 0.$ Tehdään algebrallisesti. Graafisesti koneella.

Palautetaan mieleen, että muotoa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ olevasta yhtälöstä päästään eteenpäin ”*ristiin kertomalla*”, siis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = cb$, kun $b, d \neq 0.$

Tätä hyödyntäen saadaan:

$$-\frac{2x}{5} = \frac{3x}{4}$$

$$4 \cdot (-2x) = 5 \cdot 3x$$

$$-8x = 15x$$

$$0 = 23x$$

$$x = 0$$

| näin voidaan siis tehdä (miinuksen voi siirtää osoittajaan tai nimittäjään, mutta ei molempiin).

Tapana on antaa vastaus muodossa $x =$jotain, eikä jotain $= x$, mutta ei väliä.

$$\frac{7x-2}{3} - \frac{7x+1}{2} = 0$$

$$\frac{7x-2}{3} = \frac{7x+1}{2} \quad |$$

$$2 \cdot (7x-2) = 3 \cdot (7x+1)$$

$$14x - 4 = 21x + 3$$

$$-7x = 7 \quad | \div (-7)$$

$$x = -1$$

Huom! Sulut, eli koko osoittaja pitää kertoa!

Prosenttilaskentaa

Määritelmä, *Prosentti*:
Prosentti, merkitään symbolilla %, tarkoittaa sadasosaa. Siis

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01\,, \qquad 42{,}4\% = \frac{42{,}4}{100} = 0{,}424\,, \qquad p\% = \frac{p}{100}.$$

Huomaa, että prosentti otetaan aina jostakin. Luvut $1, 42{,}4$ ja p ovat nimeltään *prosenttilukuja*.

Määritelmä, *Promille*:
Promille, merkitään symbolilla ‰, tarkoittaa tuhannesosaa. Siis

$$1‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001, \qquad p‰ = \frac{p}{1000}.$$

Esimerkki 1:

Kuinka paljon on 21% luvusta 836? VASTAUS: $\frac{21}{100} \cdot 836 = 175{,}56.$

Yleisesti pätee:

$$\boxed{p\% \text{ luvusta } a \text{ on } \frac{p}{100} \cdot a.}$$

Esimerkki 2a:

Kuinka monta prosenttia luku 35 on luvusta 78?

VASTAUS: $\frac{35}{78} = 0{,}4\overline{487179}$, eli prosentteina $44,\overline{871794}\% \approx 44{,}9\%$. Prosenttiluku on $44{,}9$.

Kuinka monta prosenttia luku 78 on luvusta 35?

VASTAUS: Kuten edellä $\frac{78}{35} = 2{,}2\overline{285714}$, eli prosentteina $222,\overline{857142}\% \approx 223\%$. Prosenttiluku on nyt 223.

Yleisesti pätee:

$$\boxed{\text{Luku } a \text{ on } \frac{a}{b} \cdot 100\% \text{ luvusta } b.}$$

Esimerkki 2b:

Usein lasketaan annetun prosenttiluvun määräämä osuus kokonaisuudesta. Esimerkiksi jos liuoksen sokeripitoisuus on 15%, niin $230g$:ssa liuosta on sokeria $\frac{15}{100} \cdot 230g = 0{,}15 \cdot 230g = 34{,}5g$. Lukua $230\ g$ sanotaan *perusarvoksi* ja tuloksena saatua lukua $34{,}5g$ sanotaan *prosenttiarvoksi*.

Esimerkki 3:

Mikä luku on 5% suurempi kuin luku 30? Toisin sanoen: Luku 30 kasvaa 5%. Mikä on tämä luku? VAST.: $\frac{100+5}{100} \cdot 30 = 1{,}05 \cdot 30 = 31{,}5$.

Luku $1 + \frac{p}{100}$ on *muutoskerroin*, esimerkissä siis luku 1,05.

Yleisesti pätee:

$$\boxed{\text{Luku } \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a \text{ on } p\% \text{ suurempi kuin luku } a.}$$

Esimerkki 4:

Mikä luku on 5% pienempi kuin luku 30? Toisin sanoen: Luku 30 vähenee 5%. Mikä luku on tuloksena?

VASTAUS: $\frac{100-5}{100} \cdot 30 = 0{,}95 \cdot 30 = 28{,}5$. Luku $1 - \frac{p}{100}$ on muutoskerroin, esimerkissä siis luku 0,95.

Yleisesti pätee:

$$\boxed{\text{Luku } \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot a \text{ on } p\% \text{ pienempi kuin luku } a.}$$

Esimerkki 5:

Kuinka monta prosenttia luku 7 on suurempi kuin 4? Toisin sanoen: Kuinka monta prosenttia luvun 4 täytyy kasvaa, jotta saadaan luku 7?

VASTAUS: On kaksi tapaa.

a) Verrataan kyseessä olevien lukujen erotusta $7-4=3$ alkuperäiseen arvoon 4 (*kuin* – sanan jälkeen oleva luku). Siis

$$\frac{7-4}{4}\cdot 100\% = \frac{3}{4}\cdot 100\% = 75\%.$$

b) Verrataan suoraan kyseisiä lukuja toisiinsa, suurempi jaetaan pienemmällä ja lopuksi vähennetään 100% eli yksi kokonainen *alkuperäisestä* luvusta (vain *suurempi* – osuus tarkastelussa). Siis

$$\frac{7}{4}\cdot 100\% = 175\%, \qquad \text{joten} \qquad 175\% - 100\% = 75\%.$$

Yleisesti pätee, kun $a > b > 0$:

Luku a on $\dfrac{a-b}{b}\cdot 100\%$ suurempi kuin luku b.

Esimerkki 6:

Kuinka monta prosenttia luku 4 on pienempi kuin 7? Toisin sanoen: Kuinka monta prosenttia luvun 7 täytyy vähentyä, jotta saadaan 4?

VASTAUS: On kaksi tapaa.

a) Verrataan kyseessä olevien lukujen erotusta $7-4=3$ alkuperäiseen arvoon 7 (*kuin* – sanan jälkeen oleva luku). Siis

$$\frac{7-4}{7}\cdot 100\% = \frac{3}{7}\cdot 100\% = 42{,}\overline{857142}\% \approx 43\%.$$

b) Verrataan suoraan kyseisiä lukuja toisiinsa, pienempi jaetaan suuremmalla ja lopuksi saatu tulos vähennetään 100%:sta eli *alkuperäisestä* luvusta (vain *pienempi* – osuus tarkastelussa). Siis

$$\frac{4}{7}\cdot 100\% = 57{,}\overline{142857}\%, \qquad \text{joten}$$

$$100\% - 57{,}\overline{142857}\%, = 42{,}\overline{857142}\% \approx 43\%.$$

Yleisesti pätee, kun $a > b > 0$:

$$\boxed{\text{Luku } b \text{ on } \frac{a-b}{a}\cdot 100\% \text{ pienempi kuin luku } a.}$$

Vertailuprosentit siis ilmoittavat, kuinka monta prosenttia luku on pienempi tai suurempi kuin toinen luku. Koska *prosentti on suhdetta ilmaiseva luku*, niin perusarvona (-lukuna) on aina vertauskohde eli se arvo (luku), johon verrataan.

Huom/Muista:

Prosentuaalinen muutos lasketaan aina alkuperäisestä arvosta. Jos esimerkiksi hinta nousee ensin 12% ja sitten laskee 12%, niin tulos ei ole sama kuin alkuperäinen hinta.
Esim. Polkupyörä maksaa $120€$. Hinta nousee 12%, eli uusi hinta on tällöin $120€ \cdot 1{,}12 = 134{,}4€$. Tässä alkuperäinen arvo on siis $120€$. Hinta laskee sitten 12%, eli uusi hinta on tällöin $134{,}4€ \cdot 0{,}88 = 118{,}272€$. Alkuperäinen arvo (=hinta) on nyt $134{,}4€$!

Prosenttiyksikkö:

Suureen muutos voidaan esittää prosentteina. Jos itse prosenttiluku muuttuu (esim. lainan korkoprosentti 8 %:sta 10 %:iin), niin muutos voidaan ilmaista joko prosentteina $\frac{10-8}{10} \cdot 100\% = 20\%$ tai *prosentti-yksikköinä eli prosenttilukujen erotuksena* $10\% - 8\% = 2\%$.

Esimerkkitehtävä ALV:

Suomessa arvonlisävero on vero, jonka kuluttaja maksaa esim. ruuasta ja joistakin palveluista (parturi/kampaaja jne.)

Arvonlisävero lasketaan verottomasta hinnasta ja se lisätään aina verottomaan hintaan. Siis

1) Kirjan myyntihinta muodostuu perushinnasta ja siihen lisätystä 8 %:n ALV:sta. Kuinka paljon arvonlisäveroa sisältyy 9,90 euroa maksavan oppikirjan hintaan? (PM 1/tehtävä 134)

2) Elintarvikkeen myyntihinta muodostuu perushinnasta ja siihen lisätystä 17 %:n arvonlisäverosta. Kuinka monta prosenttia elintarvikkeen hinnasta on arvonlisäveroa? (PM 1/tehtävä 141)

RATKAISUT

1) Siis perushinta + ALV = myyntihinta. Koska ALV lasketaan aina perushinnasta, niin saadaan yhtälö (merkitään x:llä perushintaa)

$$x \cdot 1{,}08 = 9{,}90\ €$$

$$x = 9{,}1\overline{6}\ €$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{ALV} = 9{,}90\ € - 9{,}1\overline{6}\ € = 0{,}7\overline{3}\ €$$

2) Olkoon x perushinta, jolloin ALV:n on $0{,}17x$ ja myyntihinta $1{,}17x$. Tällöin ALV:n osuus on

$$\frac{0{,}17x}{1{,}17x} = \frac{0{,}17}{1{,}17} = 0{,}14529 \ldots \approx 14{,}5\ \%\,.$$

Esimerkkitehtävä esim. kokeessa:

Jättiläiskurpitsan massa on $100kg$, josta veden osuus on 99%. Kurpitsa jäi vahingossa aurinkoon, jolloin se kuivui (vettä haihtui). Lopulta kurpitsassa oli enää 98% vettä. Mikä oli kurpitsan massa tällöin?

Esimerkkitehtävä esim. kokeessa:

Jättiläiskurpitsan massa on $100kg$, josta veden osuus on 99%.
Kurpitsa jäi vahingossa aurinkoon, jolloin se kuivui (vettä haihtui).
Lopulta kurpitsassa oli enää 98% vettä. Mikä oli kurpitsan massa tällöin?

RATKAISU

Massa $100kg \mathrel{\widehat{=}} 100\%$ ALUSSA

vesi $99\% = 99kg$ muu $1\% = 1kg$ ALUSSA

TÄRKEÄ OIVALTAA!

vesi $98\% = 49kg$ muu $2\% = 1kg$ LOPUSSA

Jos siis 2% eli kaksi sadasosaa on $1kg$, niin tällöin 100% eli sata sadasosaa on 50 kertaa kaks sadasosaa eli $50 \cdot 1kg = 50kg$.
Siis vettä haihtui 50 kiloa! Veden loppumassa on $0{,}98 \cdot 50kg = 49kg$.

Massa $50kg \mathrel{\widehat{=}} 100\%$ LOPUSSA

FUNKTIO

Määritelmä, funktio:

Funktio on *sääntö/vastaavuus*, joka liittää jokaiseen muuttujan x sallittuun arvoon ***täsmälleen*** yhden arvon y. Tämä sääntö/vastaavuus voidaan usein esittää muuttujan x lausekkeena.

Sama uudestaan.

Funktio f määrittelyjoukosta A maalijoukkoon B on *sääntö/vastaavuus*, joka liittää jokaiseen muuttujan x sallittuun arvoon (määrittelyjoukosta A) ***täsmälleen*** yhden arvon y (maalijoukosta B).

Arvoa $y \in B$ kutsutaan muuttujan $x \in A$ kuvaksi (kuvapisteeksi) ja sitä merkitään $y := f(x)$.

Matemaattinen merkintä

Sanotaan, että y on x:n funktio.

$$f: A \to B, \qquad x \longmapsto y := f(x),$$

joka luetaan: ”Funktio f joukosta A joukkoon B siten, että alkio x kuvautuu alkioksi $f(x)$, joka määritellään y:ksi.”

Huomautus Tämä sääntö/vastaavuus esitetään siis usein muuttujan x lausekkeena, katso esimerkit. Mutta ei aina.

Merkintöjä **a)** *Funktiota* merkitään kaunokirjaimilla, esim.

$$f, \qquad g, \qquad h, \qquad A, \qquad V, \text{jne.}$$

b) *Funktion arvoa* muuttujan arvolla x merkitään

$$f(x), \qquad g(x), \qquad h(x), \qquad A(r), \qquad V(r), \qquad \text{jne.}$$

Älä sekoita edellisiä merkintöjä keskenään! Siis f, g, h jne. ovat funktioita ja $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ovat arvoja. Monissa oppikirjoissa on tekstiä: …funktio $f(x)$ sitä ja tätä…, mikä on väärin sanottu. Pitäisi olla: …funktio f sitä ja tätä… .

c) Matemaattiset merkinnät:

mistä-mihin

”kuvautua”-nuoli

$$f\colon A \to B, \qquad x \longmapsto y := f(x) = \underbrace{2x - 4x^3 - 3}_{\text{lauseke, josta funktion } f \text{ arvot määritetään}}$$

funktio

määrittely-joukko

maali-joukko

muuttuja

funktion arvo

Lisäksi merkintä $y := f(x)$ tarkoittaa, että suure y on määritelty lausekkeen $f(x)$ kautta.

d) Muuttujasta käytetään toisinaan vanhahtavaa nimitystä *argumentti*.

Esimerkki **a)** Lausekkeen $2x - 6$ avulla muodostetaan funktio

$$f: f(x) = 2x - 6\,.$$

Laske tämän funktion arvot kohdissa $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ a,\ a + 2$.

Taulukoidaan:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = 2x - 6}$
0	$2 \cdot 0 - 6 = -6$
1	$2 \cdot 1 - 6 = -4$
2	$2 \cdot 2 - 6 = -2$
3	$2 \cdot 3 - 6 = 0$
a	$2 \cdot a - 6 = 2a - 6$
$a + 2$	$2 \cdot (a + 2) - 6 = 2a - 2$

Havaitaan, että muuttujan arvo $x = 3$ on funktion f *nollakohta*, koska $f(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$.

b) Olkoon

$$g: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+, \qquad n \longmapsto \frac{1}{n} + n^2 - 1$$

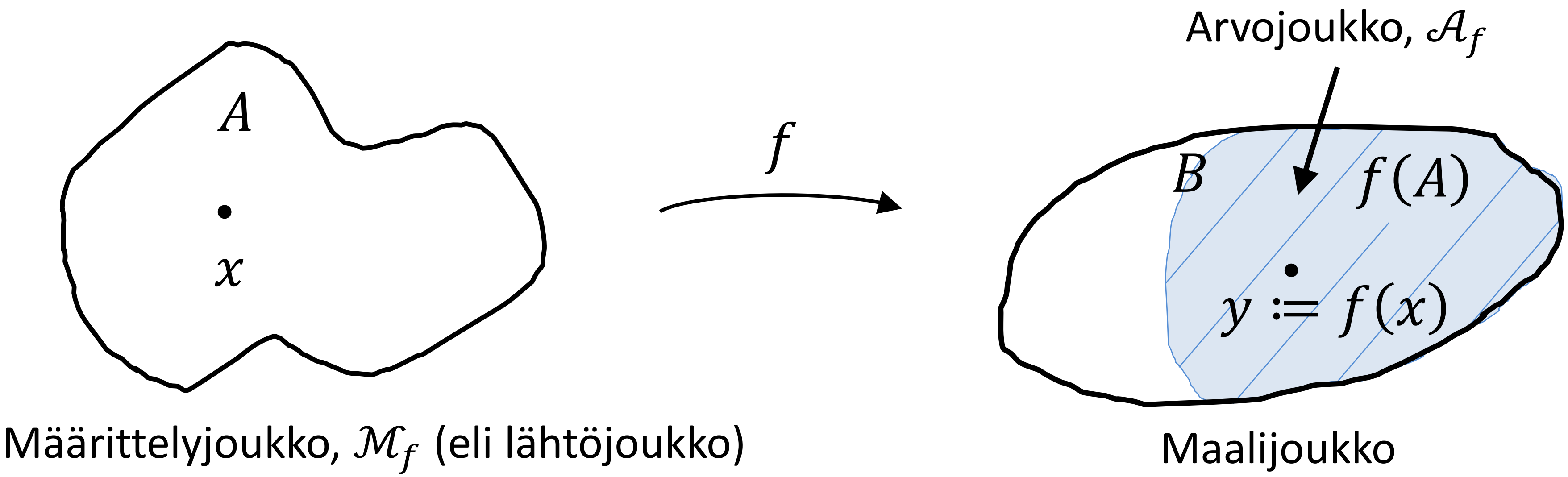
tällöin

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{g(n) = \frac{1}{n} + n^2 - 1}$
1	$1/1 + 1^2 - 1 = 1$
2	$1/2 + 2^2 - 1 = 3{,}5$
3	$1/3 + 3^2 - 1 = 8{,}333$
π	$?$

Ei onnistu, sillä $\pi \notin \mathbb{Z}_+$

Edellisen esimerkin myötä on syytä tarkastella joukkoja (ja merkintöjä) lisää

Lisää merkintöjä Funktiota havainnollistetaan usein (topologisesti) piirroskuvioin ja kuvaajien eli graafien avulla.



Määrittelyjoukkoa merkitään $\mathcal{M}_f$. Arvojoukko, merkitään $f(A)$ tai $\mathcal{A}_f$, on aina maalijoukon B osajoukko (se voi siis olla koko B). Siis

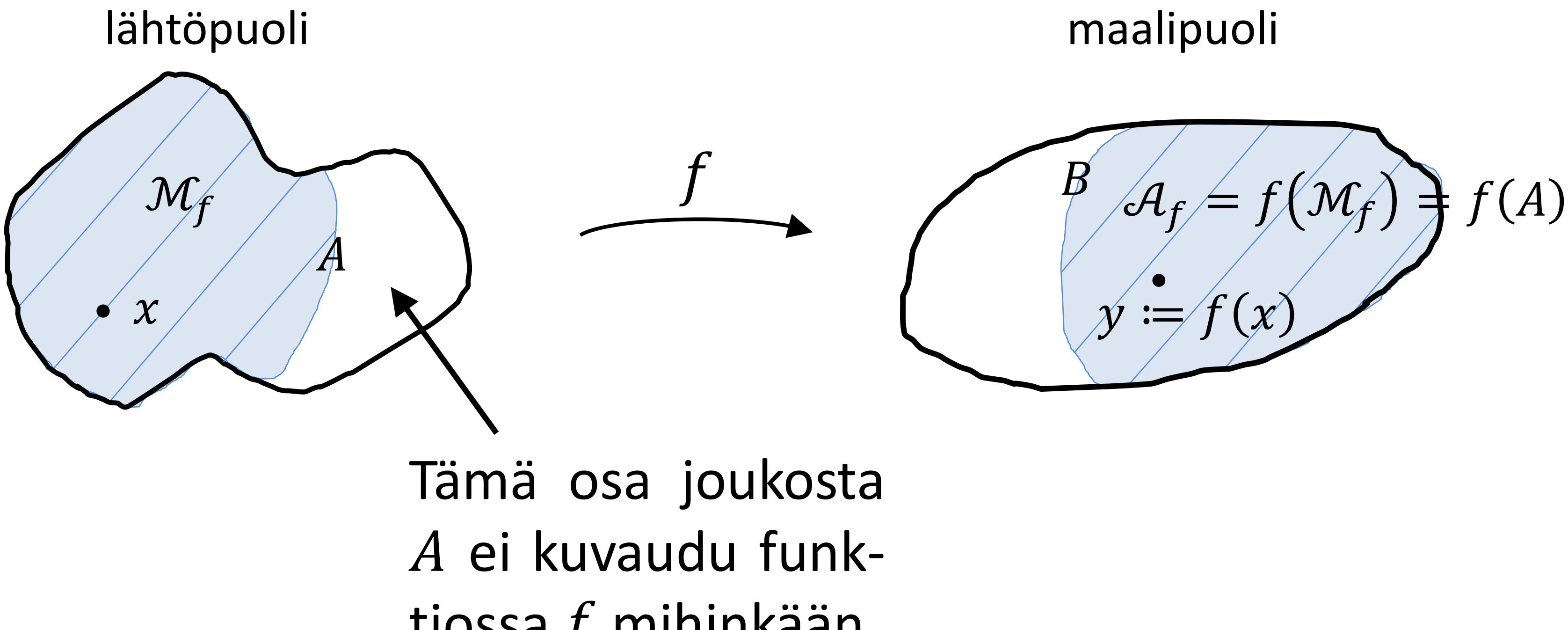
$$f(A) \subseteq B, \qquad f(A) = \mathcal{A}_f = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ jollakin } x \in A\}\,.$$

Esimerkki **a)** Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$, jolloin $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$.

b) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tällöin funktion f kuvajoukko on yhden alkion joukko, siis $f(\mathbb{R}) = \{1\}$.

Lähtö- ja määrittelyjoukko asetetaan usein samaksi tai on sama. Jos tarkastellaan funktioperhettä (eli useita funktioita), niin tällöin voidaan sanoa, että kaikille funktioille lähtöjoukko on esim. $A = \mathbb{R}$, mutta esim.

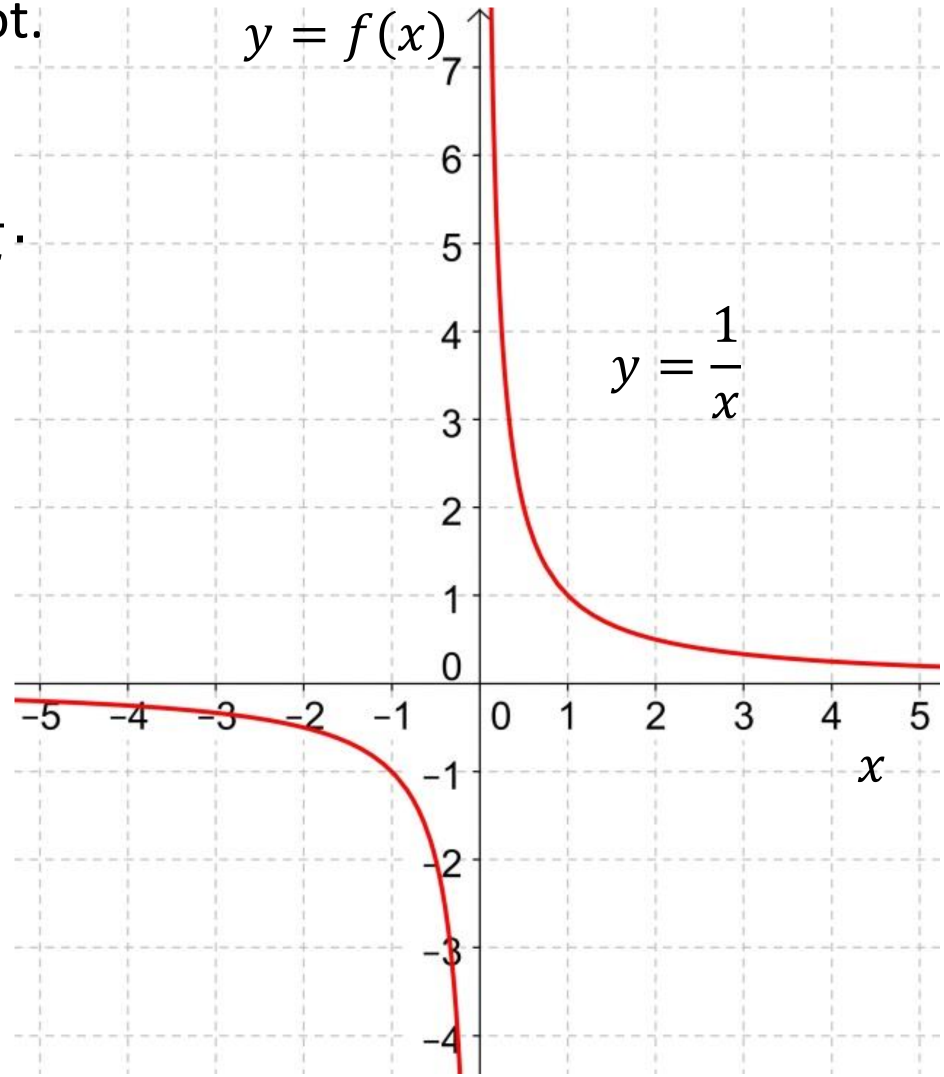
$$\mathcal{M}_{f_1} = \mathbb{R}_+, \qquad \mathcal{M}_{f_2} = \mathbb{R} = A, \qquad \mathcal{M}_{f_3} = \{x \in A \mid x > -1000\},$$
$$\mathcal{M}_{f_4} = \mathbb{R} = A, \qquad \text{jne.}$$



Lähtöjoukko ja määrittelyjoukko sekä maalijoukko ja kuvajoukko:

Esimerkki: Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto y = \frac{1}{x}$. Tästä nähdään suoraan lähtö- ja maalijoukot.

$$f\colon \overbrace{\mathbb{R}}^{\substack{\text{lähtö}-\\ \text{joukko}}} \to \overbrace{\mathbb{R}}^{\substack{\text{maali}-\\ \text{joukko}}}, \qquad x \overbrace{\longmapsto}^{\text{kuvautuu}} \frac{1}{x}.$$



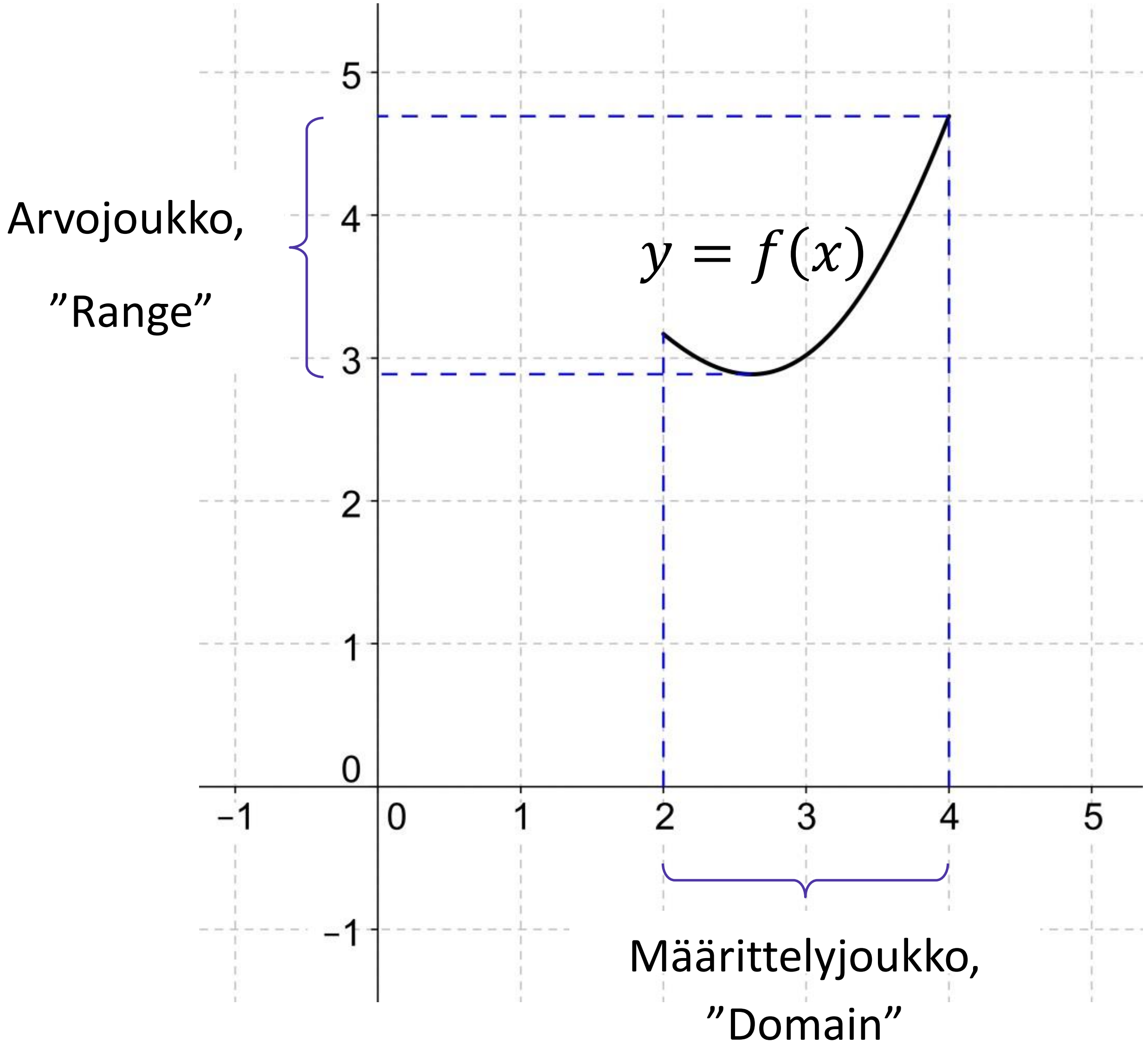
$$\text{Lähtöjoukko: } \mathbb{R}$$
$$\mathcal{M}_f = \text{Määrittelyjoukko: } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

kuvataan vaaka-akselille

$$\text{Maalijoukko: } \mathbb{R}$$
$$\mathcal{A}_f = \text{Arvojoukko: } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

kuvataan pystyakselille

Joukoille pätee: $\mathcal{M}_f \subset A$, usein $\mathcal{M}_f = A$ ja $f(A) = \mathcal{A}_f \subseteq B$ aina. Kuvajoukolle $f(C)$, kun $C \subseteq A$ voidaan kirjoittaa $f(C) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ jollekin } x \in C\}$.



Arvojoukko,
”Range”
$y = f(x)$
Määrittelyjoukko,
”Domain”

Määritelmä, reaaliarvoinen funktio, reaalifunktio, vektoriarvoinen funktio:

Reaaliarvoinen funktio on funktio, jonka maalijoukkona B on $\mathbb{R}$ (arvojoukon ei tarvitse olla koko $\mathbb{R}$). Esimerkiksi

$$f\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \tan x\ .$$

Reaalifunktio on funktio, jolla sekä määrittely- että maalijoukko koostuvat reaaliluvuista, siis

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^3.$$

Lisäksi on olemassa mm. *vektoriarvoisia* funktioita (joita ei lukiossa juuri käsitellä), esimerkiksi

$$f\colon A \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad a \longmapsto (a^2 + 2, -\sqrt{a} + \pi).$$

Määritelmä, implisiittinen ja eksplisiittinen muoto:

Implisiittinen eli ”ratkaisemattomassa muodossa oleva” funktio on muotoa

$$xy - 1 = 0 \qquad \text{TAI} \qquad x - 2y + 3 = 0, \qquad \text{jne.}$$

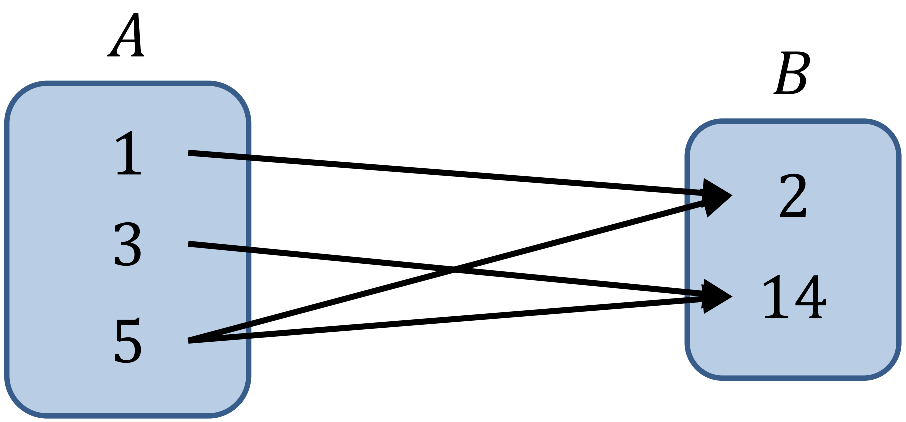
Eksplisiittinen eli ”ratkaistussa muodossa oleva” funktio on muotoa

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{TAI} \qquad y = f(x) = \frac{x+3}{2}, \qquad \text{jne.}$$

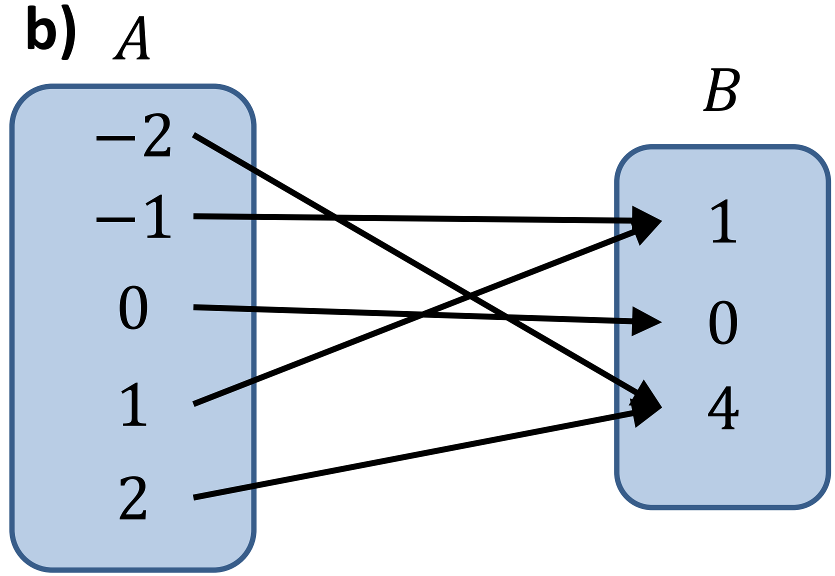
(Tämä lähinnä tiedoksi, jos sanat tulevat vastaan. Ei kysytä kokeessa.)

Esimerkki **Kuvaako nuolikuvio jotain funktiota?**

a)



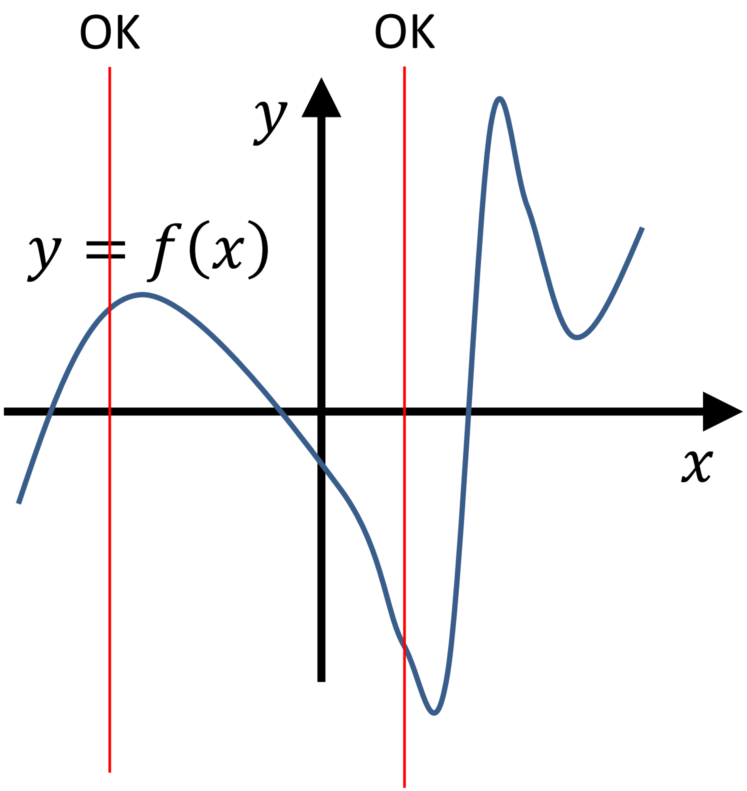
b)



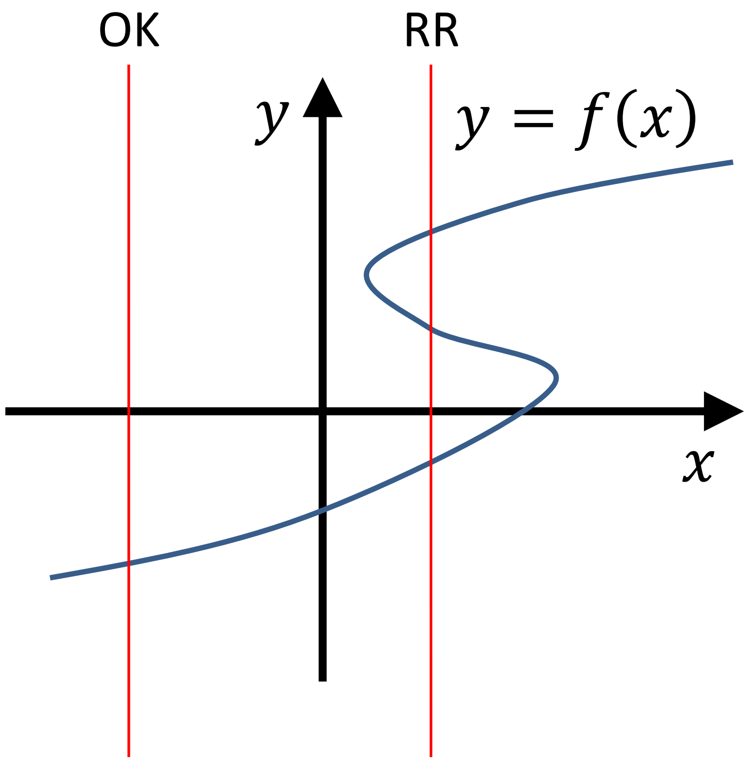
a) Ei ole, koska 5 kuvautuu kahdeksi eri arvoksi 2 ja 4. **b)** On, osoittautuu, että $y = x^2$. **c)** On, osoittautuu että luku $y \in B$ on luvun $x \in A$ numeroiden summa.

Yhteenvetona voidaan todeta, että funktiota esittävässä ”nuolikuviossa” lähtöjoukon alkioista saa lähteä vain yksi nuoli (…täsmälleen yhden arvon…), mutta maalijoukon alkioon voi osua useampi nuoli.

Pystysuoralla suoralla saa olla vain yksi leikkauskohta funktion kuvaajan kanssa.



Käyrä $y = f(x)$ on jonkun funktion kuvaaja.



Käyrä $y = f(x)$ ei ole minkään funktion kuvaaja.