Matematiikan kurssikoe, Maa2 – Polynomifunktiot- ja yhtälöt – RATKAISUT **Sievin lukio**
Keskiviikko 9.1.2019
VASTAA KAIKKIIN A-OSION TEHTÄVIIN (1-2) **ABITTIIN** JA VALITSE B-OSIOSTA KOLME TEHTÄVÄÄ TEHTÄVISTÄ 3-7! YHTEENSÄ VIITEEN TEHTÄVÄÄN SAA VASTATA! **B-OSIOSSA SAAT TARVITTAESSA VASTATA PAPERILLE** ELLEI ERIKSEEN MAINITA ABITTIIN VASTAAMISESTA.
AINEISTOT-OSION TAULUKKOTIETOJA SAA KÄYTTÄÄ.
LASKINOHJELMISTOJA SAA (PITÄÄ) KÄYTTÄÄ, MUTTA MUISTA PERUSTELLA NIIN PYYDETTÄESSÄ! (Muutama TI-komento löytyy aineistosta.)

A-osa / Del A

1. Vain yksi vaihtoehto on oikein! (12 p)

1.1 Määritä lausekkeen

$$x(x-2)^2 - 2(2-x)(2+x)$$

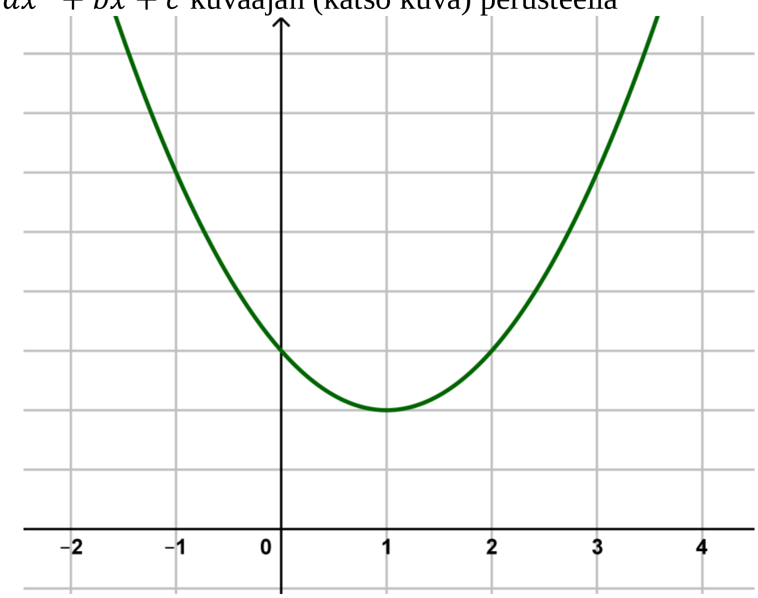
toisen asteen termin kerroin.

- ○ -4
- ◉ -2
- ○ 1
- ○ 2
- ○ 4

1.2 Tulon nollasääntö on

- ◉ Tulo on nolla täsmälleen silloin, kun ainakin yksi tulon tekijöistä on nolla.
- ○ Tulo on nolla vain silloin, kun ensimmäinen tulon tekijöistä on nolla.
- ○ Ehdosta tulo on nolla seuraa, että ainakin yksi tulon tekijöistä on nolla.
- ○ Ehdosta ainakin yksi tulon tekijöistä on nolla seuraa, että tulo on nolla.

1.3 Funktion $f: f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaajan (katso kuva) perusteella



- ○ $a > 0$ ja $D > 0$
- ○ $a < 0$ ja $D > 0$
- ◉ $a > 0$ ja $D < 0$
- ○ $a < 0$ ja $D < 0$

1.4 Täydennä puuttuvat kohdat:

$$(4-3x)^3 = \_\_\_\_\_ - 144x + 108x^2 + \_\_\_\_\_\_$$

- ○ 12 ja $-9x^3$
- ◉ 64 ja $-27x^3$
- ○ -36 ja $-x^3$
- ○ 36 ja $-27x$
- ○ -12 ja $+9x$

1.5 Tiedetään, että binomi $x+3$ jakaa polynomin $P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12$. Mikä seuraava väite on tosi?

- ○ $P(3) = 0$
- ◉ $P(-3) = 0$
- ○ $P(3) < 0$
- ○ $P(-3) < 0$
- ○ $P(-3) > 0$

1.6 Millä parametrin t arvolla suora $y = -2tx + 3$ on kasvava?

- ○ $t > 0$
- ◉ $t < 0$
- ○ $t > 3$
- ○ $t < 3$
- ○ $t > -2$

1.7 Aseta luvut suuruusjärjestykseen.

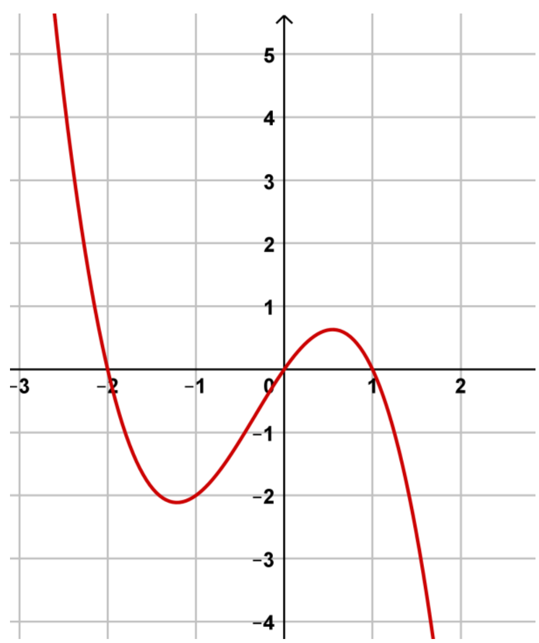
$$\sqrt{10} \qquad 3 \qquad \frac{12}{\sqrt{6}}$$

- ○ $\sqrt{10} < 3 < \frac{12}{\sqrt{6}}$
- ○ $3 < \frac{12}{\sqrt{6}} < \sqrt{10}$
- ◉ $3 < \sqrt{10} < \frac{12}{\sqrt{6}}$
- ○ $\sqrt{10} < \frac{12}{\sqrt{6}} < 3$
- ○ $\frac{12}{\sqrt{6}} < 3 < \sqrt{10}$

1.8 Ratkaise epäyhtälö

$$-x^3 - x^2 + 2x > 0\,,$$

kun lauseketta vastaavan funktion kuvaaja on



- ○ $0 < x < 1$
- ○ $x < -2$ ja $0 < x$
- ○ $x \le -2$ ja $0 \le x \le 1$
- ◉ $x < -2$ ja $0 < x < 1$
- ○ $x = -2, x = 0$ tai $x = 1$

1.9 Laske

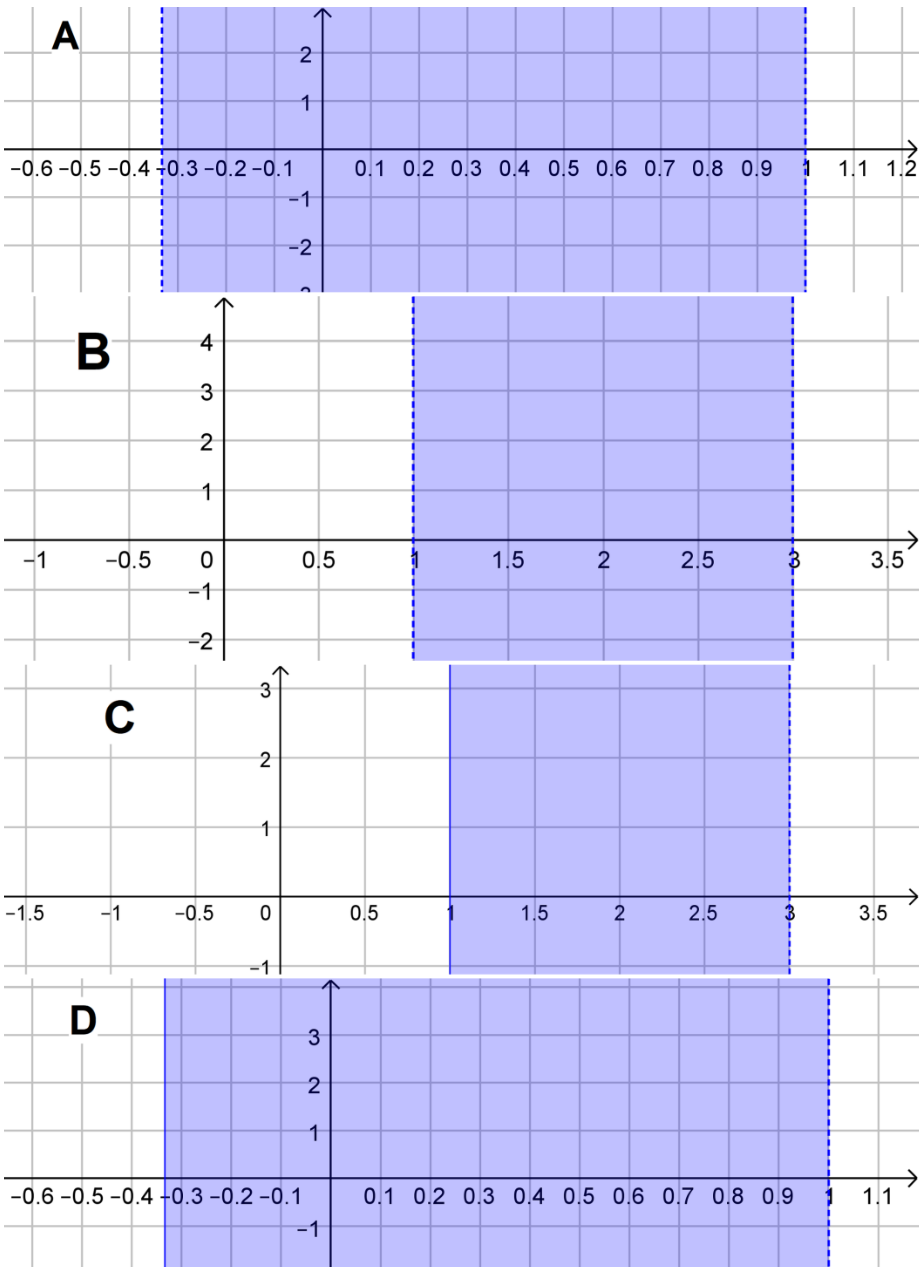
$$\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)^2$$

- (•) $9-4\sqrt{5}$
- ( ) $1-4\sqrt{5}$
- ( ) 1
- ( ) $7\sqrt{5}$
- ( ) $9-2\sqrt{5}$
- ( ) $1-2\sqrt{5}$

1.10 Mikä alla olevista vaihtoehdoista **A-D** vastaa kaksoisepäyhtälön

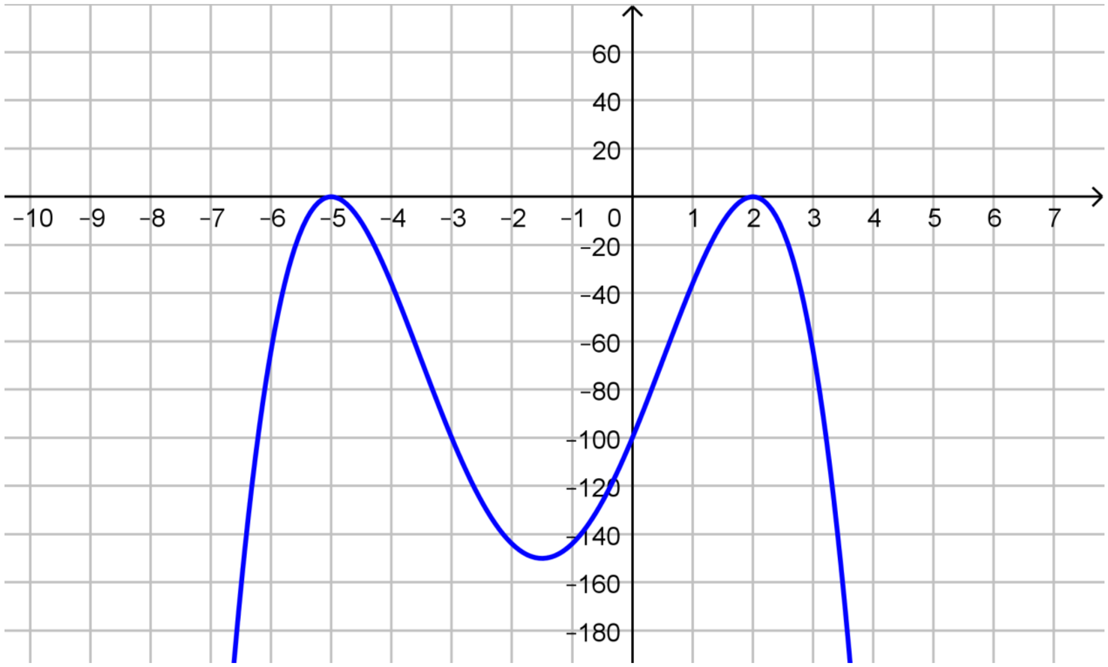
$$1 \leq 3x+2 < x+4$$

ratkaisua?



- ( ) A
- ( ) B
- ( ) C
- (•) D

1.11 Minkä funktion kuvaaja on annettuna?



- ○ $f\colon f(x) = (x-5)^2(x-2)^2$
- ○ $f\colon f(x) = -(x-5)^2(x+2)^2$
- ○ $f\colon f(x) = -(x+5)^3(x-2)^2$
- ◉ $f\colon f(x) = -(x+5)^2(x-2)^2$
- ○ $f\colon f(x) = -(x+5)^2(x-2)^3$
- ○ $f\colon f(x) = (x+5)^2(x-2)^2$
- ○ $f\colon f(x) = -(x+100)(x-5)^2(x-2)^2$

1.12 Millä muuttujan arvoilla funktion $-2x^6 - \sqrt{3}x^2$ arvo on negatiivista?

- ○ $\forall x \in \mathbb{R}$
- ○ $x \neq -2$ ja $x \neq -\sqrt{3}$
- ◉ $x \neq 0$
- ○ Ei millään muuttujan arvoilla, koska muuttujat on korotettu parillisiin potensseihin.
- ○ $-\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{2}} < x < \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2. a) Ratkaise yhtälö perustellen. (5p)

$$\mathbf{4\sqrt{3}x = 1 - 4x^2}$$

b) Minkä virheen Pekka on tehnyt seuraavassa epäyhtälön ratkaisussa? Ratkaise epäyhtälö perustellen. (5p)

$$\mathbf{x^2 - x > 0}$$

$$\mathbf{x^2 > x \qquad \| : x}$$

$$\mathbf{x > 1}$$

c) Muotoile eli kirjoita tekijälause. (Voi tehdä ns. selkosuomeksi, mutta suositeltavaa on käyttää myös matemaattisia merkintöjä.) (2p)

a) Ratkaisukaavaa käyttäen saadaan

$$4\sqrt{3}x = 1 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 4\sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{-4\sqrt{3} \pm 8}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm 1$$

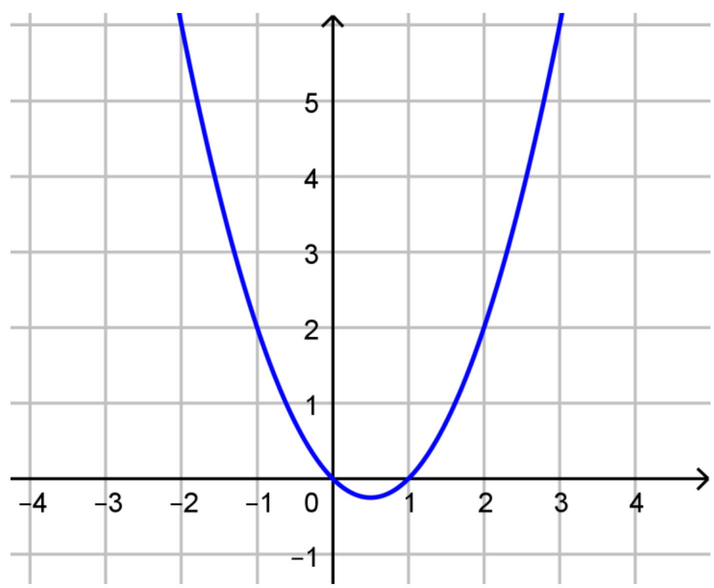
b) Pekka ei ole muistanut neljän vaiheen menetelmää toisen asteen epäyhtälön ratkaisemisessa. Lisäksi esim. jakaessaan x:llä, Pekka ei muistanut sitä, että x voi olla nolla.

Ratkaisu (neljä vaihetta):

1. $x^2 - x > 0$, OK

2. $x^2 - x = 0 \rightarrow x = 0$ tai $x = 1$, OK

3. Paraabeli $y = x^2 - x$ aukeaa ylöspäin sillä x^2-termin kerroin 1 on positiivinen. Nollakohdat $x = 0$ ja $x = 1$. Kuvaaja →



4. $x < 0$ tai $1 < x$.

c) Tekijälause: Binomi $x - x_0$ jakaa polynomin P jos ja vain jos polynomin P arvo muuttujan arvolla x_0 on nolla. Siis

$$P(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)|P(x)$$

B-osa / Del B

3. Tämä tehtävä on vastattava abittiin!

a) Tiedetään, että luku $\mathbf{20-6\sqrt{11}}$ on luvun $\mathbf{3-\sqrt{11}}$ neliö. Onko väite

$$\sqrt{20-6\sqrt{11}} = 3-\sqrt{11}$$

totta? Perustele huolella. (4p)

b) Polynomi

$$P(x) = x^3 - ax^2 - 3x + c$$

on jaollinen binomilla $x+3$. Lisäksi $P(0)=10$. Määritä $P(x)$ ja laske $P(2)$ (tarkka arvo). Liitä vastaukseesi mukaan funktion P kuvaaja järkevästi skaalattuna. (8p)

a) Vaikka pätee

$$\left(3-\sqrt{11}\right)^2 = 20-6\sqrt{11},$$

niin koska $3-\sqrt{11} < 3-\sqrt{9} = 0$, ei väite ole totta. Neliöjuuri on se **ei-negatiivinen luku**, jonka toinen potenssi palauttaa lakuperäisen luvun.

b) Koska $P(0)=10$, niin $c=10$. Edelleen koska binomi $x+3$ jakaa polynomin P, niin tekijälauseen nojalla

$$P(-3) = (-3)^3 - a\cdot(-3)^2 - 3\cdot(-3) + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -27 - 9a + 9 + 10 = 0$$

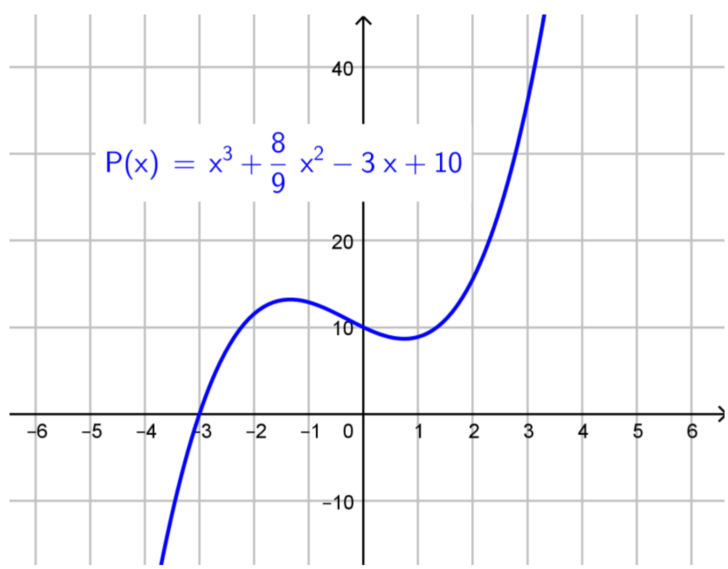
$$\Rightarrow \quad a = \frac{8}{-9}$$

Siis

$$P(x) = x^3 + \frac{8}{9}x^2 - 3x + 10$$

ja $P(2) = 8 + \frac{32}{9} - 6 + 10 = \frac{140}{9} \approx 15{,}56.$

Kuvaaja →



4. a) Millä $\boldsymbol{k}$:n arvoilla yhtälöllä

$$\boldsymbol{kx^2 - x = 1}$$

on i) täsmälleen yksi ratkaisu, ii) ei yhtään ratkaisua ja iii) täsmälleen kaksi ratkaisua. Muista perustella joka kohta huolellisesti. (9p)

b) Jaa polynomi

$$\boldsymbol{x^3 - x^2 - 9x + 9}$$

ensimmäisen asteen tekijöihin. Kirjoita välivaiheet näkyviin. (Pelkkä laskimen antama vastaus antaa yhden pisteen.) (3p)

a) i) Havaitaan aluksi, että muuttuja k on toisen asteen termin kerroin, joten jos $k = 0$, niin yhtälö sievenee ensimmäisen asteen yhtälöksi $-x - 1 = 0$. Tällä yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu $x = -1$.

Toisaalta, kun $k \neq 0$, niin määrittämällä ne k:n arvot, joilla diskriminantti D on nolla, saa toisen asteen yhtälö $kx^2 - x - 1 = 0$ myös täsmälleen yhden ratkaisun. Näin ollen

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot k \cdot (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{4}, \quad \text{OK} -\frac{1}{4} \neq 0\,.$$

Ratkaisuksi (jota tosin ei kysytä) tällöin tulee $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2\cdot(-0{,}25)} = -2$.

VASTAUS: muuttujan k arvoilla 0 ja $-1/4$.

ii) Ratkaisuja ei ole, kun diskriminantin arvo on negatiivista. Siis, kun

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot k \cdot (-1) < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 4k < 0 \quad \Rightarrow \quad k < -\frac{1}{4}.$$

VASTAUS: muuttujan k arvoilla $k < -1/4$.

iii) Täsmälleen kaksi ratkaisua saadaan kun diskriminantin arvo on positiivista. Siis, kun

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot k \cdot (-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 4k > 0 \quad \Rightarrow \quad k > -\frac{1}{4}.$$

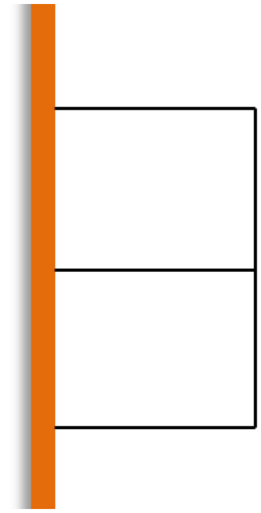
Lisäksi pitää huomioida, että vaikka $0 > -\frac{1}{4}$, niin tällöin yhtälöllä $kx^2 - x - 1 = 0$ onkin vain yksi ratkaisu (yhtälö supistuu ensimmäisen asteen yhtälöksi $-x - 1 = 0$ → **a)**-kohta)

VASTAUS: muuttujan k arvoilla $k > -1/4$, mutta $k \neq 0$.

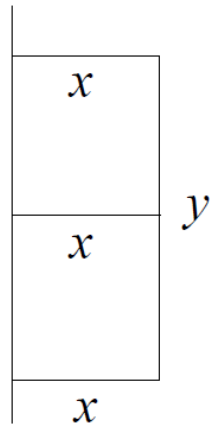
a) Ryhmittelykeinoa käyttäen saadaan

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1) = (x^2 - 9)(x-1) = (x+3)(x-3)(x-1).$$

5. Maanviljelijä rakentaa ladon seinän viereen kanoille suorakulmion muotoisen aitauksen, jonka hän jakaa vielä kahteen osaan seinää vastaan kohtisuoralla aidalla. Katso havainnekuva →. Verkkoaitaa on käytettävissä 30 m. Kuinka seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus on valittava, jotta koko aitauksen ala olisi vähintään 72 m²?



Aitaa on käytettävissä 30 m ja kuvion mukaisesti



$$3x + y = 30$$
$$y = 30 - 3x$$

Aitauksen pinta-alalle on ehto $A \geq 72\ \mathrm{m}^2$

$$xy \geq 72$$
$$x(30 - 3x) \geq 72$$
$$-3x^2 + 30x - 72 \geq 0$$

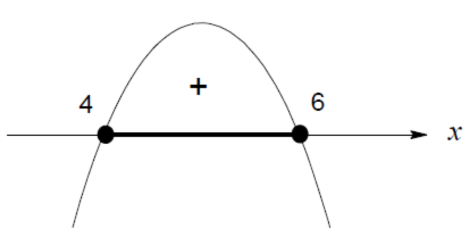
Merkitään $f(x) = -3x^2 + 30x - 72$ ja ratkaistaan funktion nollakohdat

$$-3x^2 + 30x - 72 = 0$$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{(30)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-72)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = \frac{-30 \pm 6}{-6}$$

$$x_1 = 4 \quad \vee \quad x_2 = 6$$



Kuvaajan perusteella $A \geq 72\ \mathrm{m}^2$, kun $4 \leq x \leq 6$ (m)

Vastaus: Pituuden tulee olla vähintään 4 m ja enintään 6 m.

6. Tämä tehtävä on vastattava abittiin!

a) Ratkaise epäyhtälö

$$\boldsymbol{9x^4 \geq 25x^2}$$

perustellen. Kirjoita välivaiheet näkyviin. Hyödynnä laskinohjelmistoja, mutta pelkkä laskinohjelmiston ratkaisu antaa vain 1 pisteen. Liitä vastaukseesi mukaan epäyhtälöä vastaavan funktion kuvaaja järkevästi skaalattuna. (9p)

b) Muodosta se kolmannen asteen polynomifunktio $\boldsymbol{P}$, jolla on nollakohdat $\boldsymbol{-6}$, $\boldsymbol{-4}$ ja $\boldsymbol{-1}$ ja jonka arvo kohdassa $\boldsymbol{2}$ on $\boldsymbol{72}$. (3p)

a) Hyödynnetään neljän vaiheen menetelmää. Kirjoitetaan epäyhtälö perusmuotoon, **vaihe 1**:

$$9x^4 - 25x^2 \geq 0$$

Ratkaistaan epäyhtälöä vastaavan yhtälön $9x^4 - 25x^2 = 0$ nollakohdat, **vaihe 2**:

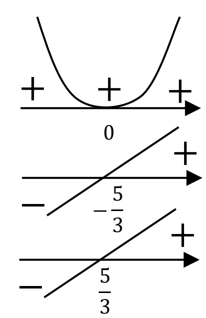
$$9x^4 - 25x^2 = x^2(9x^2 - 25) = x^2(3x+5)(3x-5) = 0$$

Nollakohdiksi saadaan: $x = 0$ (kaksinkertainen nollakohta) tai $x = -\frac{5}{3}$ tai $x = \frac{5}{3}$.

Luodaan merkkikaavio ja tarkastellaan lausekkeen $9x^4 - 25x^2 = x^2(3x+5)(3x-5)$ arvoja tulon tekijöiden merkkien avulla, **vaihe 3**:

$\boldsymbol{-\frac{5}{3}}$ $\quad$ $\mathbf{0}$ $\quad$ $\boldsymbol{\frac{5}{3}}$

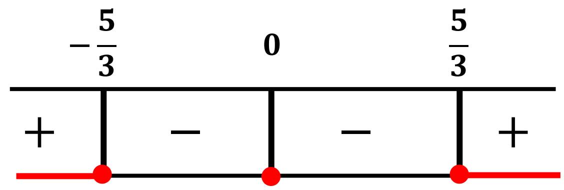
$\boldsymbol{x^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\boldsymbol{3x+5}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\boldsymbol{3x-5}$	$-$	$-$	$-$	$+$
tulo	$+$	$-$	$-$	$+$



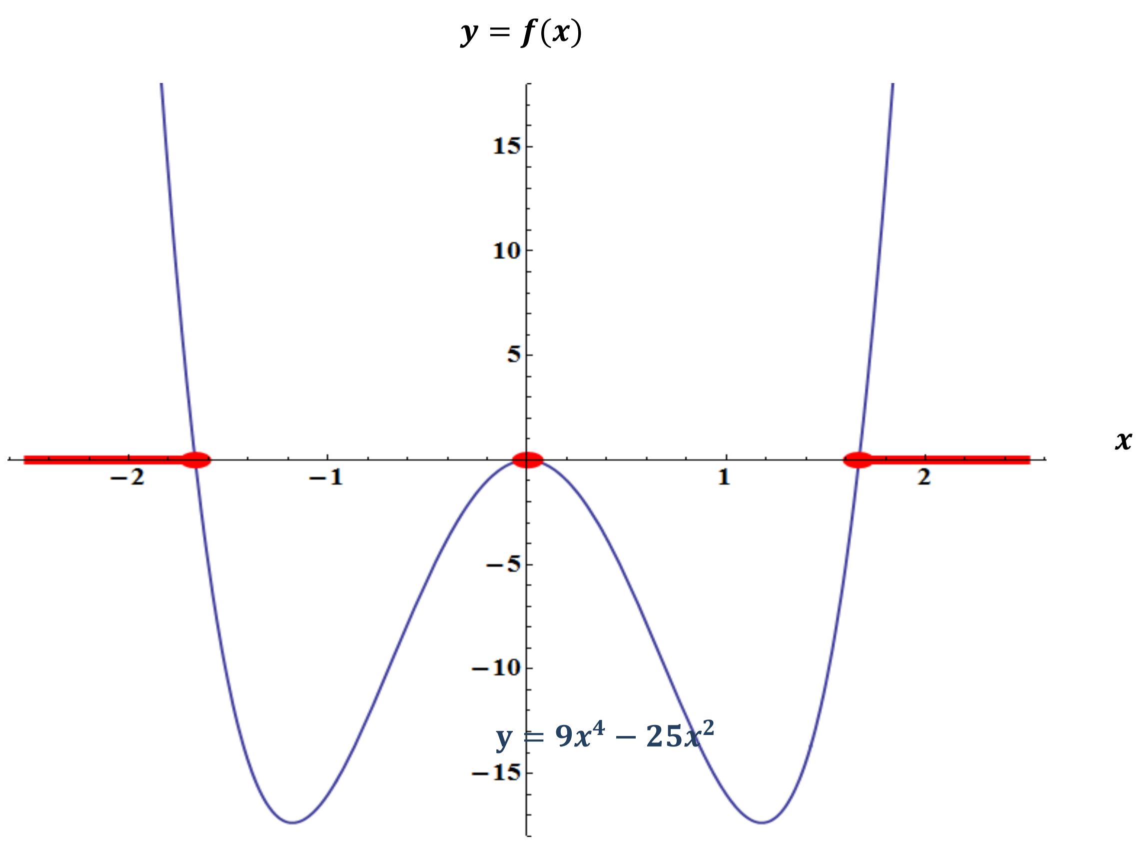
Muodostetaan ratkaisujoukko, **vaihe 4**: Epäyhtälön ratkaisuksi saadaan: $x \leq -\frac{5}{3}$ tai $x = 0$ tai $x \geq \frac{5}{3}$.

Voi myös taulukoida arvoja tai perustella kuvaajan avulla.

x	$9x^4 - 25x^2$
-2	$\mathbf{44} > \mathbf{0}$
$-\frac{5}{3}$	$\mathbf{0}$
-1	$\mathbf{-16} < 0$
0	$\mathbf{0}$
1	$\mathbf{-16} < 0$
$\frac{5}{3}$	$\mathbf{0}$
2	$\mathbf{44} > \mathbf{0}$



Kuva funktion $f(x) = 9x^4 - 25x^2$ kuvaajasta eli käyrästä $y = f(x)$.



b) Kolmannen asteen polynomifunktio on muotoa

$$f: f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,.$$

Tiedetään, tekijälauseen ja nollakohtien nojalla,

$$f(x) = a\big(x-(-6)\big)\big(x-(-4)\big)\big(x-(-1)\big) = a(x+6)(x+4)(x+1)$$

ja toisaalta, että $f(2) = 72$. Yhdistetään, saadaan

$$f(2) = a(2+6)(2+4)(2+1) = 72 \quad \Longrightarrow \quad a \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3 = 72 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{72}{144} = \frac{1}{2}.$$

Siis, etsitty kolmannen asteen polynomifunktio on muotoa

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+6)(x+4)(x+1), \qquad \text{Tämä riittää!}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+6)(x+4)(x+1) = \frac{1}{2}(x+6)(x^2+5x+4) = \frac{1}{2}(x^3+11x^2+34x+24)$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 17x + 12 \qquad \to \quad a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{11}{2}, \qquad c = 17, \qquad d = 12$$

7. a) Onko mahdollista valita vakio a siten, että polynomilla $Q(x) = x^3 + ax^2 - (a+7)x - 18$ on tekijänä $x + 2$. Jos on, määritä a ja jaa polynomi Q tekijöihin. Jos ei, niin perustele miksi ei.

b) Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Osoita, että luku $n^8 - 1$ on jaollinen lukua n edeltävällä ja seuraavalla kokonaisluvulla.

a) Koska tekijälause antaa:

$$Q(-2) = (-2)^3 + a(-2)^2 - (a+7)(-2) - 18 = 0$$

niin

$$-8 + 4a + 2a + 14 - 18 = 0$$
$$6a = 12$$
$$a = 2$$

Näin ollen on mahdollista $a = 2$, ja polynomi Q saadaan tekijämuotoon

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - (2+7)x - 18 = x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = x^2(x+2) - 9(x+2)$$

$$= (x^2 - 9)(x+2) = (x+3)(x-3)(x+2)$$

b) *Oletus:* $n > 1$ kokonaisluku

Väite: Luku $n^8 - 1$ on jaollinen lukua n edeltävällä ja seuraavalla kokonaisluvulla.

Todistus: Koska $1 = 1^8$, niin binomikaavaa $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ käyttäen saadaan

$$n^8 - 1 = (n^4)^2 - (1^4)^2 = (n^4 - 1^4)(n^4 + 1^4) = \ \ldots = (n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4+1),$$

josta havaitaan, että luvun $n^8 - 1$ tekijöinä ovat $(n-1)$ ja $(n+1)$. Näin on väite osoitettu.