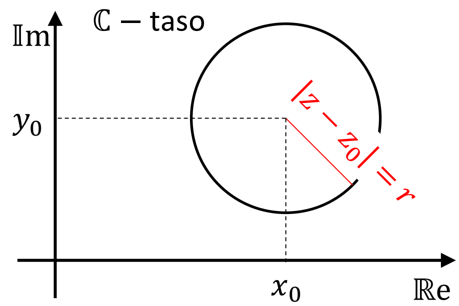
Kompleksiluvut, vol. 3

ALGORITMIT MATEMATIIKASSA, MAA12

Olkoon $z_0 = x_0 + iy_0$ ja $r > 0$. Yhtälö

$$|z - z_0| = r$$

esittää kompleksitason z_0-keskistä r-säteistä ympyrää, koska $|z - z_0|$ on lukuja z ja z_0 vastaavien pisteiden välinen etäisyys, kuva.



Sijoittamalla $z = x + iy$ ja $z_0 = x_0 + iy_0$, saadaan

$$|x + iy - (x_0 + iy_0)| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = r.$$

Molemmat puolet neliöön korottamalla, saadaan MAA 4 – kurssilta tuttu ympyrän yhtälö, siis (muista $|z|^2 = z\bar{z}$)

$$|(x - x_0) + i(y - y_0)|^2 = r^2$$

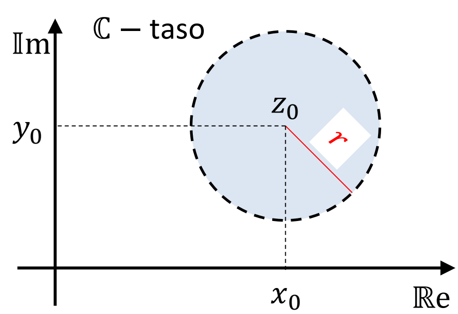
$$\Longrightarrow \quad \big((x - x_0) + i(y - y_0)\big)\big((x - x_0) - i(y - y_0)\big) = r^2$$

$$\Longrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Epäyhtälö $|z - z_0| < r$ taas esittää vastaavaa ympyräaluetta ilman reunaa ja epäyhtälö

$$|z - z_0| \leq r$$

Samaa ympyräaluetta reunan kanssa.



De Moivren kaava

Kompleksiluku voidaan siis esittää kahdella tavalla: $z = x + iy$ eli suorakulmaisissa koordinaateissa tai napakoordinaateissa. Näiden välinen yhteys lähtien suorakulmaisista koordinaateista on

$$\begin{cases} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\sin\theta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z = x + iy = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta,$$

josta saadaan z:n esitys *napakoordinaateissa* $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Esimerkki 1 Esitä napakoordinaateissa luku $z = 1 + i\sqrt{3}$.
Luvun itseisarvo (moduli) on

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2\,.$$

Yhtälöstä

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

saadaan $\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi$. Edelleen, koska $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (miksi?), niin täytyy olla $n = 0$. Siis

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Esimerkki 2 Esitä suorakulmaisissa koordinaateissa luku

$$z = 2\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right).$$

Koska $z = x + iy = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$, niin

$$\begin{cases} x = 2\cos\frac{3\pi}{4} = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} \\ y = 2\sin\frac{3\pi}{4} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{cases} \implies z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}(i-1).$$

Yleisesti pätee (todistus induktiolla) ns. De Moivren kaava (huom. $|z| = 1$)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Kompleksilukujen potenssit voi myös (kannattaa) laskea tällä tavoin.

Esimerkki Laske luvut z^2, z^3, z^4 ja z^5, kun $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Koska

$$|z| = \sqrt{\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \implies \theta = \frac{2\pi}{3}\,,$$

niin

$$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Huomaa, että kyseinen kompleksiluku sijaitsee *yksikköympyrällä* toisessa neljänneksessä. Näin ollen, De Moivrea hyödyntäen, saadaan

$$z^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Edelleen

$$z^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos\left(3\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 - i0 = 1.$$

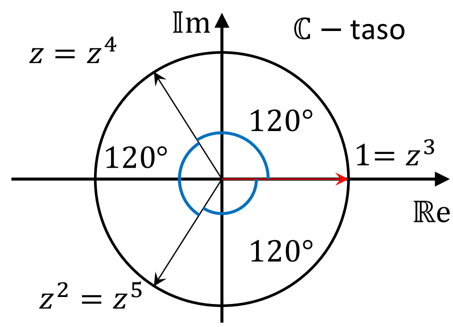
Siis $z^3 = 1$? Mitä ihmettä? Ja

$$z^4 = z^3 z = 1\cdot z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z^5 = z^3 z^2 = 1\cdot z^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Yleisesti

$$z^{3k} = (z^3)^k = 1^k = 1,$$
$$z^{3k+1} = (z^3)^k\cdot z = z,$$
$$z^{3k+2} = z^{3k}\cdot z^2 = z^2.$$

Vastaavat kompleksitason pisteet sijaitsevat siis origokeskisellä yksikköympyrällä 120°:n välein.



Potensseille z^n voidaan siis hyödyntää trigonometriaa

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Saatat ajatella, että OK, ihan kiva juttu. Huomaa kuitenkin, että tulos antaa enemmän. Nimittäin yllä olevassa kaavassa ja De Moivren kaavassa n saa olla mikä tahansa reaaliluku. Sijoitetaan $n = \frac{1}{2}$. Mitä on

$$z^{\frac{1}{2}}\,?$$

Sehän on $\sqrt{z}$, eli voidaan laskea myös kompleksiset juuret $\sqrt[n]{z}$.

Määritelmä, kompleksiluvun neliöjuuri ja n:s juuri:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)$$

ja

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\tfrac{\theta}{n} + i\sin\tfrac{\theta}{n}\right).$$

Pätee myös toinen kaava:

$$\sqrt{z} = \sqrt{x+iy} = \pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} + i\frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right) \qquad y \neq 0\,.$$

Esimerkkejä **1.** Monisteessa.
2. Mitä tarkoitetaan ykkösen juurilla (”roots of unity”).
Ratkaisu kompleksiluvun z n:lle juurelle

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\tfrac{\theta}{n} + i\sin\tfrac{\theta}{n}\right)$$

ei ole ainoa ratkaisu. Kuten edellä havaittiin ”ykkösen potenssit kiertävät origokeskisen yksikköympyrän kehää”. Myös juuret ”kiertävät kehää”. Toisin sanoen yhtälön $w^n = z$ täydellinen ratkaisu on

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\theta}{n} + k \cdot \tfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta}{n} + k \cdot \tfrac{2\pi}{n}\right)\right),$$

missä $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Yhtälön $w^n = 1$ täydellinen ratkaisu on

$$w = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{|1|} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{0}{n} + k \cdot \tfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{0}{n} + k \cdot \tfrac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$$= \cos\left(k \cdot \tfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k \cdot \tfrac{2\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Siis miten määritetään esimerkiksi yhtälön $w^{11} = 1$ kaikki ratkaisut?

Aluksi todetaan, että kaikki ratkaisut ovat origokeskisen yksikköympyrän kehällä. Ykkösen pituus on 1. Sitten jaetaan täysi kierros 11:sta, saadaan $\frac{2\pi}{11} \approx 32{,}72\ldots°$ ja eräs juuri, merkitään w_1, on siis

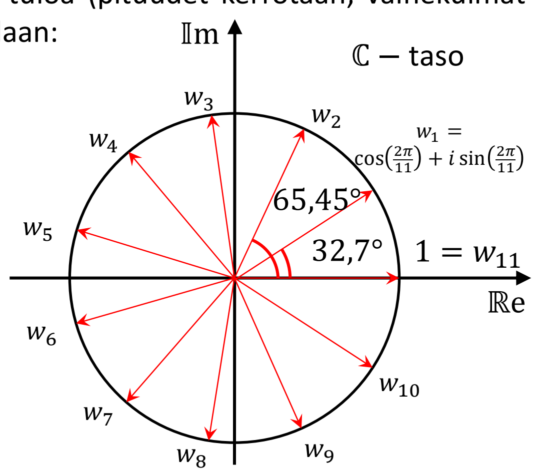
$$w_1 = \cos\left(\tfrac{2\pi}{11}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi}{11}\right).$$

Sitten vaan kompleksilukujen tuloa (pituudet kerrotaan, vaihekulmat summataan) hyödyntäen saadaan:

$$w_2 = \cos\left(\tfrac{4\pi}{11}\right) + i\sin\left(\tfrac{4\pi}{11}\right)$$

$$\vdots$$

$$w_{10} = \cos\left(\tfrac{20\pi}{11}\right) + i\sin\left(\tfrac{20\pi}{11}\right)$$



Vastaava menettely toimii yleisesti. Pitää aluksi muistaa laskea pituus, eli reaalinen n:s juuri. Sitten vain ”kehää kiertämään”.

Polynomit kompleksialueella

1. Ensimmäisen asteen polynomiyhtälöt

Ensimmäisen asteen polynomiyhtälö on muotoa

$$az + b = 0, \qquad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \text{ ja } z \text{ on muuttuja.}$$

Tämän yhtälön ratkaisu on $z_1 = -\frac{b}{a}$, joten voidaan kirjoittaa

$$az + b = a\left(z + \tfrac{b}{a}\right) = a(z - z_1).$$

Jokainen 1. asteen polynomi $p(z) = az + b$ voidaan siis esittää muodossa $p(z) = a(z - z_1)$, missä z_1 on yhtälön $p(z) = 0$ ratkaisu.

Esimerkki Ratkaise yhtälö $2z = i(z + 1)$.

Saadaan

$$2z = i(z+1) \quad \Longrightarrow \quad 2z = iz + i \quad \Longrightarrow \quad (2 - i)z = i$$

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{i}{2 - i} = \frac{i \cdot (2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2i - 1}{4 - (-1)} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Ratkaisu: $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

2. Toisen asteen polynomiyhtälöt

Toisen asteen polynomiyhtälö on muotoa

$$az^2 + bz + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0.$$

Ratkaisukaava sama kuin ennen

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

mutta nyt ratkaisu on aina olemassa, sillä neliöjuuri on hyvin määritelty.

Ratkaisujen z_1 ja z_2 summan ja tulon kaavat (2.kurssilta) pätee

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

samoin tekijöihinjakokaava

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Näin ollen jokainen toisen asteen polynomi $p(z) = az^2 + bz + c$ voidaan esittää muodossa $p(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$, missä z_1 ja z_2 ovat yhtälön $p(z) = 0$ ratkaisuja.

Esimerkki Olkoon $p(z) = z^2 - (2+3i)z + 6i$. Ratkaise yhtälö $p(z) = 0$ ja jaa $p(z)$ tekijöihin.

Ratkaisukaavasta

$$z = \frac{2+3i \pm \sqrt{(2+3i)^2 - 24i}}{2} = \frac{2+3i \pm \sqrt{-5-12i}}{2}.$$

Neliöjuuri lasketaan jollakin tavoin, saadaan

$$\sqrt{-5-12i} = \ \dots \ = -2+3i.$$

Siis

$$z = \frac{2+3i \pm (-2+3i)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = 3i \\ z_2 = 2 \end{matrix}.$$

Näin ollen

$$p(z) = (z-3i)(z-2).$$

3. Korkeamman asteen polynomiyhtälöt

Lause, Algebran peruslause:
Jokaisella kompleksikertoimisella polynomiyhtälöllä

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ \dots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0, n \geq 1$$

on kompleksilukujen joukossa ainakin yksi ratkaisu.
Todistus: Gauss (20-vuotiaana vuonna 1797), me sivuutetaan.

Lause, polynomin nollakohdat ja tekijöihin jako:
Jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ \dots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0, n \geq 1$$

on kompleksilukujen joukossa täsmälleen n nollakohtaa, kun jokainen nollakohta otetaan mukaan niin monta kertaa kuin sen kertaluku osoittaa. Jos nollakohdat ovat $z_1, z_2, \dots, z_n$, niin

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$