Kompleksiluvut, vol 3.

ALGORITMIT MATEMATIIKASSA, MAA12

Kertausta Maa 2 ja Maa 8 -kursseilla opittua:

- Yhteys tasoon → x ja y -koordinaatit korvataan reaali- ja imaginaariosilla. Kompleksiluku on muotoa $x + yi$, muista $i^2 = -1$.
- Yhteen-, vähennys- ja kertolasku kuten ”normaalisti”, jakolaskussa piti ensin laventaa nimittäjän liitto- eli konjugaattiluvulla.
- Potenssien ja juurten laskeminen napakoordinaattimuodossa.

Polynomilla

$$p(z) = z^2 + 1$$

ei ole reaalisia 1. asteen tekijöitä, koska yhtälöllä $z^2 + 1 = 0$ ei ole reaalijuuria. Laajennetaan reaalilukujen lukujoukkoa.

Reaalilukuja voidaan geometrisesti pitää lukusuoran (vaaka- eli x-akselin) pisteinä tai paikkavektoreina. Vastaavasti xy-tason pisteitä tai paikkavektoreita voidaan pitää lukuina, joita kutsutaan *kompleksiluvuiksi*. Tällöin xy-taso samaistetaan z-tasoksi, eli kompleksitasoksi, ja kompleksiluku $z = (x, y)$, missä x ja y ovat lukua z vastaavan pisteen koordinaatit tason pisteeksi (paikkavektoriksi).

Määritelmä:
Kompleksiluku on järjestetty reaalilukupari (x, y).

Huomautus 1) Kompleksiluvut ovat samat, jos ja vain jos niiden kummatkin koordinaatit ovat keskenään samat:

$$(x, y) = (u, v) \quad \Leftrightarrow \quad x = u \ \wedge \ y = v$$

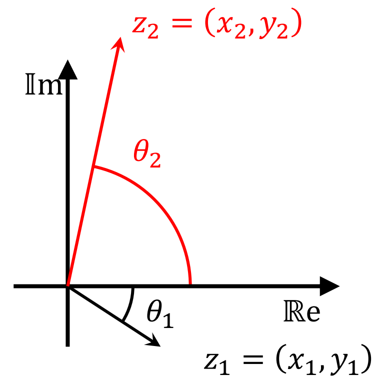
2) Kompleksiluvun $z = (x, y)$ itseisarvo $|z|$ (moduli) on sitä vastaavan vektorin pituus,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Ja vaihekulma θ, missä $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$, on se kulma, jonka tämä vektori muodostaa positiivisen x-akselin kanssa. Kompleksiluvun $0 = (0{,}0)$ vaihekulmaa ei määritellä.
Siis

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad x \neq 0\,.$$

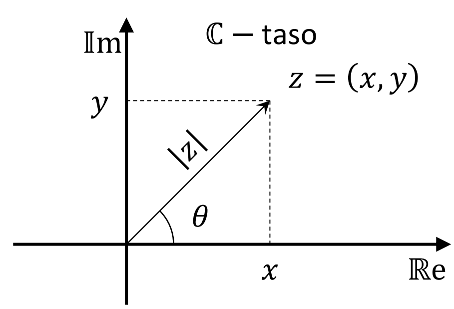
Jos $x = 0$, niin $\theta = \pm\frac{\pi}{2} = \pm 90°$ ja merkki saadaan y:n merkistä.



Kompleksiluku z voidaan siis esittää joko suorakulmaisen koordinaatiston koordinaatteja x ja y käyttäen tai sitten napakoordinaatiston koordinaatteja pituus $r = |z|$ ja vaihekulma θ käyttäen. Molemmat tavat ovat yleisesti käytössä.

Akselit ovat:
Reaaliakseli = vaaka-akseli
Imaginaariakseli = pystyakseli

Taso on joko $\mathbb{C}$ −taso tai z −taso.



Reaaliluvuilta periytyy kaikki yhteenlaskun laskulait.
Kompleksilukujen kertolaskulle halutaan seuraavat ominaisuudet:
- tulon itseisarvo on tekijöiden itseisarvojen tulo ja
- tulon vaihekulma on tekijöiden vaihekulmien summa (mod 2π).

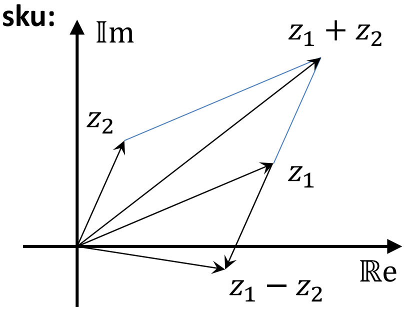
Merkintä (mod 2π) tarkoittaa sitä, että tarvittaessa lisätään/vähennetään 2π:n jokin monikerta, jotta päästään välille $0 \leq \theta < 2\pi$.

Määritelmä, kompleksilukujen yhteenlasku:
Kompleksilukujen $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ summa on

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ja erotus

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

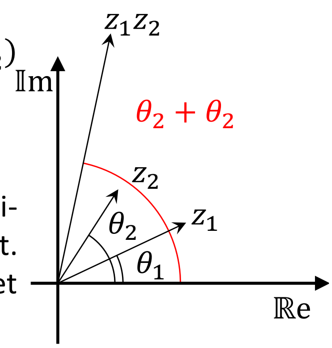


Kuten vektoreiden summa ja erotus.

Määritelmä, kompleksilukujen kertolasku:
Kompleksilukujen $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ tulo on

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Ja kuten yhteenlaskun tapauksessa, niin reaaliluvuilta periytyy kaikki kertolaskun laskulait. Tulossa voidaan kulmat summata ja pituudet kertoa → katso kuva. Tähän palataan.



Tuloksen $i^2 = -1$ perustelua

Kompleksilukujen $(a_1, 0)$ ja $(a_2, 0)$ summa

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0 + 0) = (a_1 + a_2, 0)$$

ja tulo

$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 a_2 - 0 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0) = (a_1 a_2, 0)$$

Muotoa $(a, 0)$ olevien kompleksilukujen summa ja tulo ovat tätä samaa muotoa ja vastaavat reaalilukujen summaa ja tuloa.

Toisaalta, kompleksilukujen $(a, 0)$ ja $z = (x, y)$ tulo

$$(a, 0) \cdot (x, y) = (ax - 0 \cdot y, 0 \cdot x + ay) = (ax, ay)$$

on sama kuin reaaliluvun a ja pisteen (x, y) paikkavektorin tulo.
→ Em. syistä kompleksiluku $(a, 0)$ samaistetaan reaaliluvun a kanssa ja merkitään $(a, 0) = a$.

Mitä on kompleksiluku $(0,1)$? Se on *imaginaariyksikkö*, merkitään i. Siis $(0,1) = i$. Pätee tärkeä tulos: $i^2 = -1$.

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0^2 - 1^2, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$$

Huomautus Saadaan kompleksiluvun tuttu esitysmuoto

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y \cdot (0,1) = x + yi = x + iy$$

Ominaisuutta $i^2 = -1$ käyttäen voidaan polynomi $P(z) = z^2 + 1$ jakaa tekijöihin, sillä

$$P(z) = z^2 + 1 = z^2 - (-1) = z^2 - i^2 = (z + i)(z - i)$$

Yleisesti pätee: $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$ (Muista: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$)

Esimerkki **a)** Jaa tekijöihin polynomi $z^2 + 2z + 5$.
b) Ratkaise yhtälö $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Vastaukset

a) Saadaan

$$z^2 + 2z + 5 = z^2 + 2z + 1 + 4 = (z + 1)^2 + 2^2 = (z + 1 + 2i)(z + 1 - 2i)$$

b) Tulon nollasäännön nojalla

$$z^2 + 2z + 5 = (z + 1 + 2i)(z + 1 - 2i) = 0,$$

kun $\begin{cases} z + 1 + 2i = 0 \\ z + 1 - 2i = 0 \end{cases}$ eli kun $z = -1 \pm 2i$.

Kaavan

$$a^2 + b^2 = (a - bi)(a + bi).$$

nojalla voidaan siis jakaa kaikki reaalikertoimiset toisen asteen polynomit tekijöihin, joilla ei ole reaalisia nollakohtia.

Huomaa, että jos reaalikertoimisella polynomilla on jokin kompleksijuuri, sillä on myös toinen kompleksijuuri, nimittäin edellisen liittoluku.

Liittoluku

Merkinnän $i = (0,1)$, puhtaan reaaliluvun samastuksen $a = (a, 0)$ ja ominaisuuden $a(x, y) = (ax, ay)$ avulla saadaan

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y(0,1) = x + yi = x + iy.$$

Kompleksilukujen $z_1 = (a, b)$ ja $z_2 = (c, d)$ tulo saa nyt muodon

$$z_1 z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc).$$

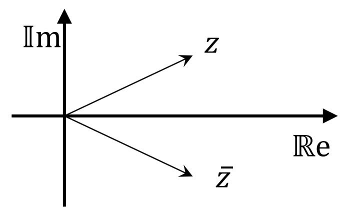
Eli täsmälleen sama kuin tulon määritelmä.

Sanotaan, että kompleksiluku $z = x + iy$ on *reaalinen*, jos $y = 0$, *imaginaarinen*, jos $y \neq 0$ ja *puhtaasti imaginaarinen*, jos $x = 0$. Lisäksi luvun $z = x + iy$ *reaaliosa* on $\mathbb{R}e\, z = x$ ja *imaginaariosa* on $\mathbb{I}m\, z = y$. Huomaa, että reaaliosa ja imaginaariosa ovat molemmat reaalilukuja!

Luvun $z = x + iy$ *liittoluku* eli *(kompleksi)konjugaatti* on $\bar{z} = x - iy$. Kompleksitasossa se on luvun z peilikuva reaaliakselin suhteen.

Selvästi $\bar{z} = z$ jos ja vain jos z on reaalinen.

Lisäksi $\bar{\bar{z}} = z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.



Luvun z ja liittoluvun $\bar{z}$ tulo

$$z\bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

joten pätee

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Siis kompleksiluvun itseisarvo (etäisyys origosta) saadaan kertomalla luku liittoluvullaan ja ottamalla tulosta neliöjuuri – kätevää!

Lukujen $z = x + iy$ ja $w = u + iv$, $w \neq 0$ osamäärä

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{(xu + yv) + i(yu - xv)}{u^2 + v^2}$$

$$= \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}$$

Esimerkki Ratkaise yhtälö $\bar{z} - z = iz + 4$.

Sijoitetaan $z = x + iy$, jolloin $\bar{z} = x - iy$, saadaan

$$x - iy - (x + iy) = i(x + iy) + 4$$

$$\Longrightarrow \quad -2iy = ix - y + 4 \quad \Longrightarrow \quad (-y + 4) + i(x + 2y) = 0$$

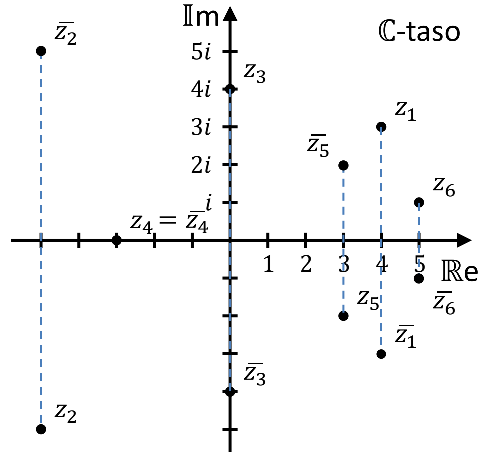
Sekä reaali- että imaginaariosa tulee olla nolla, joten

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} -y + 4 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = 4 \\ x = 8 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z = 8 + 4i$$

Esimerkki Olkoot

$$\begin{aligned}
z_1 &= 4 + 3i \\
z_2 &= -5 - 5i \\
z_3 &= 4i \\
z_4 &= -3 \\
z_5 &= 3 - 2i \\
z_6 &= 5 + i
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}$e-osat ("x") $\mathbb{I}$m-osat ("y")



Tällöin ns. liittoluvut (miksi → syy selviää) ovat:

$$\overline{z_1} = 4 - 3i, \qquad \overline{z_2} = -5 + 5i, \qquad \overline{z_3} = -4i, \qquad \overline{z_4} = -3, \ldots$$

Toisin sanoen liittoluvut ovat peilikuvia $\mathbb{R}$e-akselin suhteen ja vaikutus on siis $\mathbb{I}$m-osan etumerkin vaihtuminen. Yleisesti, jos $z = x + iy$, niin $\bar{z} = x - iy$.

Yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku:
Hyvin suoraviivaista.

Esimerkki

$$z_1 + z_2 = (4 + 3i) + (-5 - 5i) = -1 - 2i$$

$$z_6 - z_5 = (5 - i) - (3 - 2i) = 2 + i$$

Siis yhteen- ja vähennyslaskuissa reaaliosat keskenään, samoin imaginaariosat keskenään.

$$\begin{aligned}
z_5 \cdot z_1 = (3 - 2i)(4 + 3i) &= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3i - 2i \cdot 4 - 2i \cdot 3i \\
&= 12 + 9i - 8i - 6i^2 \\
&= 12 + 6 + i \\
&= 18 + i
\end{aligned}$$

Muista
$i^2 = -1$

$$z_2 \cdot \overline{z_3} = (-5 - 5i) \cdot (-4i) = 20i + 20i^2 = -20 + 20i$$

Entäpä

$$\frac{z_1}{z_6} = \frac{4+3i}{5-i} \ ?$$

Ongelmana näyttäisi olevan nimittäjässä oleva i. Hyödynnetään neliöiden erotusta.

Siis

$$\frac{z_1}{z_6} = \frac{4+3i}{5-i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{20+15i+4i-3}{25-5i+5i+1} = \frac{17+19i}{26}$$

$$= \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i$$

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{4i}{-5-5i} = \frac{4i \cdot (-5+5i)}{(-5-5i)(-5+5i)} = \frac{-20i-20}{25-25i+25i+25}$$

$$= \frac{-20-20i}{50} = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}i$$

Tehtäviä: Sijoita kompleksiluvut z_i $\mathbb{C}$-tasoon ja määritä liittoluvut $\overline{z_i}$ (sijoita myös ne $\mathbb{C}$-tasoon).

$z_1 = 3-3i$, $z_2 = 1+4i$, $z_3 = -4+2i$, $z_4 = 5-4i$,

$z_5 = -2i$, $z_6 = -3-7i$, $z_7 = 6$, $z_8 = i$

Laske $z_1 + z_4$, $z_6 - \overline{z_2}$,

$z_3 \cdot z_7$, $z_2 \cdot \overline{z_6}$,

$\dfrac{z_1}{z_3}$, $\dfrac{z_5}{\overline{z_4}}$,

${z_8}^3$

Mitä tarkoittaa tulos

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \ ? \qquad \text{esim. } z = 4+3i$$

Ratkaisut:

$z_1 = 3 - 3i \qquad \overline{z_1} = 3 + 3i$

$z_2 = 1 + 4i \qquad \overline{z_2} = 1 - 4i$

$z_3 = -4 + 2i \qquad \overline{z_3} = -4 - 2i$

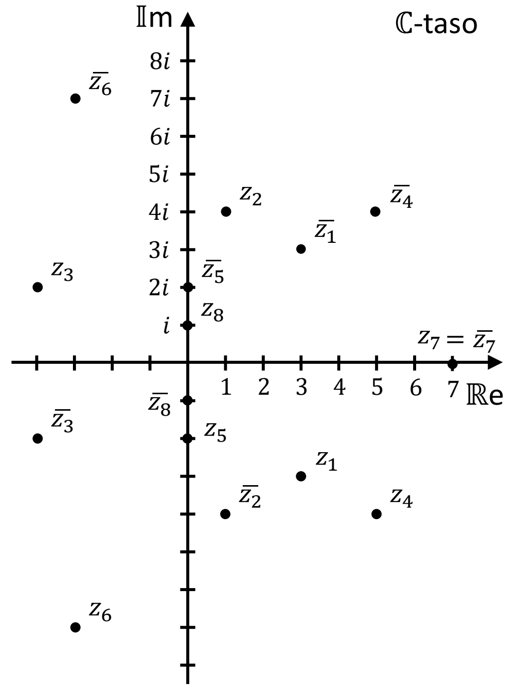
$z_4 = 5 - 4i \qquad \overline{z_4} = 5 + 4i$

$z_5 = -2i \qquad \overline{z_5} = +2i$

$z_6 = -3 - 7i \qquad \overline{z_6} = -3 + 7i$

$z_7 = 6 \qquad \overline{z_7} = 6$

$z_8 = i \qquad \overline{z_8} = -i$



Laske

$$z_1 + z_4 = (3 - 3i) + (5 - 4i) = 8 - 7i$$

$$z_6 - \overline{z_2} = (-3 - 7i) - (1 - 4i) = -4 - 3i$$

$$z_3 \cdot z_7 = (-4 + 2i) \cdot 6 = -24 + 12i$$

$$z_2 \cdot \overline{z_6} = (1 + 4i) \cdot (-3 + 7i) = -3 + 7i - 12i - 28$$

$$= -31 - 5i$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{3 - 3i}{-4 + 2i} = \frac{(3 - 3i)(-4 - 2i)}{(-4 + 2i)(-4 - 2i)} = \frac{-12 - 6i + 12i - 6}{16 + 8i - 8i + 4}$$

$$= \frac{-18 + 6i}{20} = -\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i$$

$$\frac{z_5}{\overline{z_4}} = \frac{-2i}{5 + 4i} = \frac{-2i(5 - 4i)}{(5 + 4i)(5 - 4i)} = \frac{-10i - 8}{25 + 16} = -\frac{8}{41} - \frac{10}{41}i$$

$$z_8{}^3 = i^3 = i \cdot i \cdot i = -i$$