Kiintopistemenetelmä

ALGORITMIT MATEMATIIKASSA, MAA12

Tarkastellaan seuraavaksi kiintopistemenetelmää. Kirjan lausetta: *”Yhtälön $x = g(x)$ ratkaisua sanotaan funktion g kiintopisteeksi”* lienee syytä tarkastella lähemmin.

Määritelmä, Kiintopiste:
Olkoon g välillä I määritelty funktio. Luku $\xi \in I$ on funktion g *kiintopiste*, jos $g(\xi) = \xi$.

Huom. Kiintopisteet ovat funktion g kuvaajan eli käyrän $y = g(x)$ ja suoran $y = x$ leikkaus- tai sivuamispisteitä. Niitä voi olla yksi, useita tai ei yhtään.

Määritelmä, Kutistava funktio:
Funktio g on kutistava, jos on olemassa vakio $k \in \left]0,1\right[$ siten, että

$$|g(x) - g(y)| = k|x - y|, \qquad \forall\, x, y \in I\,.$$

Lause, Kutistavan funktion ominaisuuksia:
Olkoon g välillä $[a, b]$ määritelty kutistava funktio ja olkoon ehto $g(x) \in [a, b]$ voimassa kaikilla $x \in [a, b]$. Tällöin

a) funktio g on jatkuva,
b) funktiolla g on täsmälleen yksi kiintopiste ja
c) jono (x_n), missä $x_0 \in [a, b]$ ja $x_{n+1} = g(x_n)$, suppenee kohti kiintopistettä.

Todistus Pitää osoittaa, että **1.** kutistava funktio on jatkuva, **2.** kutistavalla funktiolla $g, g(x)\colon [a, b] \to [a, b]$ on täsmälleen yksi kiintopiste ja **3.** kutistavan funktion $g, g(x)\colon [a, b] \to [a, b]$ kiintopiste on jonon (x_n) raja-arvo, kun $x_0 \in [a, b]$ ja $x_{n+1} = g(x_n)$.

1. Kurssin 13 tiedoilla, (ε, δ)-todistustekniikka, saadaan jatkuvuus voimaan. Kutistavan funktion määritelmästä saadaan suoraan

$$|g(x) - g(y)| = k|x - y| < k \cdot \delta = \varepsilon,$$

joten annettua epsilonia kohti voidaan valita $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Siis, aina kun $|x - y| < \delta$, niin $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Jatkuvuus OK, muut kohdat HT.

Määritelmässä esiintyvän kertoimen $k \in]0,1[$ löytämiseksi voidaan hyödyntää väliarvolausetta (derivaatan arvolle pitää päteä ehto $]0,1[$).

Esimerkki Osoita, että välillä $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \mathrel{\widehat{=}} [30°, 90°]$ määritelty funktio $f(x) = 2 - \sin x$ on kutistava.
Jos $x, y \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, niin väliarvolauseen mukaan (selvästi f on derivoituva) x:n ja y:n määräämällä avoimella välillä on piste ξ siten, että

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Tällöin

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| .$$

Koska $\xi \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ ja $f'(x) = -\cos x$, on

$$|f'(\xi)| < \cos\frac{\pi}{6} < \frac{9}{10} ,$$

joten arvolla $k = 0{,}9$ on

$$|f(x) - f(y)| = 0{,}9 \cdot |x - y| ,$$

siis f on kutistava.

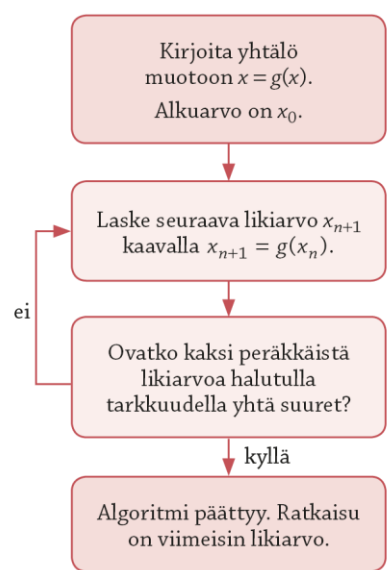
Kiintopistemenetelmä
Yhtälö $f(x) = 0$ voidaan aina (miksi?) esittää muodossa $x = g(x)$. Jos g on kutistava, niin tämä yhtälö voidaan ratkaista *kiintopistemenetelmällä*:

1. Alkulikiarvo on x_0.
2. Iteraatiokaava

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0,1,2, \dots .$$

Huomautus Vaikka yhtälö $f(x) = 0$ voidaan siis aina esittää muodossa $x = g(x)$, niin ns. iterointifunktio g ei välttämättä ole yksikäsitteinen. Se voidaan valita useammalla tavalla → esim. T252 ja T255.
Valinnalla on merkitystä → joku valinta johtaa suppenemiseen kun taas toinen valinta johtaa hajaantumiseen.
Funktion kutistavuus on riittävä ehto!

Kiintopistemenetelmän algoritmi



Esimerkki Määritä kiintopistemenetelmällä funktion

$$f(x) = x - 2 + \sin x$$

nollakohta kuuden desimaalin tarkkuudella.
Kirjoitetaan aluksi funktiosta saatava yhtälö $x - 2 + \sin x = 0$ muotoon $x = 2 - \sin x$, missä $g(x) = 2 - \sin x$.
Valitaan $x_0 = 1$, saadaan

$$\begin{aligned}
x_1 &= \ g(1) \ = 1{,}158\,529\,015\,19 \\
x_2 &= g(x_1) = 1{,}083\,785\,305\,28 \\
x_3 &= g(x_2) = 1{,}116\,264\,394\,20 \\
x_4 &= g(x_3) = 1{,}101\,533\,372\,24 \\
x_5 &= g(x_4) = 1{,}108\,098\,156\,23 \\
x_6 &= g(x_5) = 1{,}105\,148\,610\,42 \\
x_7 &= g(x_6) = 1{,}106\,469\,072\,66 \\
\cdots &= \quad \cdots \quad = \qquad \cdots
\end{aligned}$$

Näin jatkaen havaitaan, että arvosta $n = 32$ alkaen on

$$x_n = 1{,}106\,060\,157\,71\,.$$

Miten varmistutaan tuloksesta (eli funktion f nollakohdasta)? Lasketaan arvot

$$f(1{,}106\,057) \approx -4{,}6 \cdot 10^{-6} < 0$$

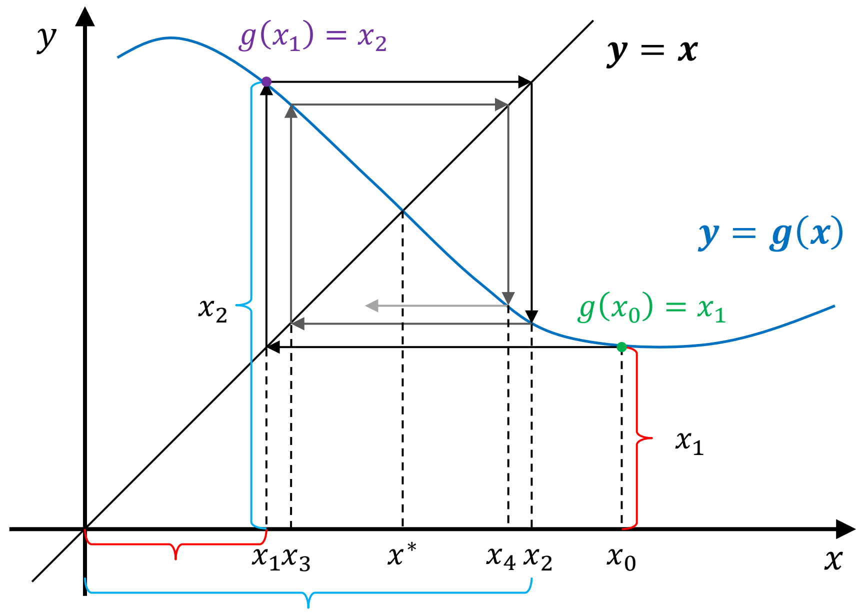
ja

$$f(1{,}106\,063) \approx 4{,}1 \cdot 10^{-6} > 0\,,$$

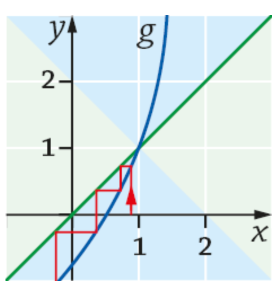
joista päätellään, että $\xi = 1{,}106060$ kuuden desimaalin tarkkuudella.

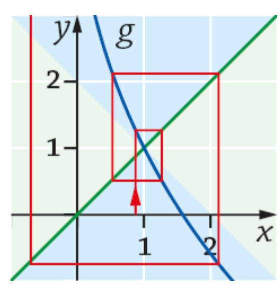
Huomautus Useimmiten suppenevuutta ei voida etukäteen osoittaa, mutta ei tämän menetelmän kokeilu aikaa hirveästi vie. Hyvällä onnella menetelmä saattaa toimia, vaikka itse funktio g ei olisikaan kutistava. (Tarkista lähde ?)

Tarkastellaan vielä lopuksi kirjan kuvaa sivulla 76.

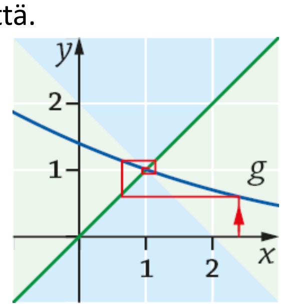


Esimerkki Jos funktion g kuvaaja on jyrkempi kuin suora $y = x$, kiintopistemenetelmä ei toimi. Iterointi vie kiintopisteestä poispäin.





Jos funktion g kuvaaja on jyrkempi kuin suora $y = x$, kiintopistemenetelmä toimii. Iterointi vie kohti kiintopistettä.



Iterointi

Iteroinnissa lasketaan saman lausekkeen arvo toistuvasti niin, että kunkin kierroksen eli *iteraation* tulos on seuraavan kierroksen lähtöarvo.

Määritelmä, iteraatio:
Iteraatio tarkoittaa toistuvasti suoritettavaa menettelyä, jossa toistamisen tarkoituksena on tuottaa yhä parempia (tarkempia) tuloksia (arvoja) annetun ongelman (matemaattisen yhtälön) ratkaisemiseksi.

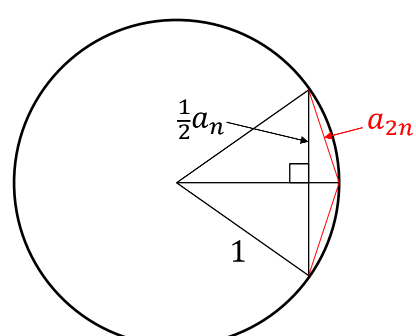
Menetelmä on seuraavanlainen yhtälöiden ratkaisemisessa iteroinnilla:

- Aluksi valitaan ratkaisun eli juuren jokin alkulikiarvo, x_0, jota käyttäen lasketaan uusi (tarkempi) likiarvo $f(x_0) = x_1$.
- Asetetaan edellä laskettu arvo $f(x_0) = x_1$ uudeksi lähtöarvoksi ja lasketaan jälleen tarkempi likiarvo $f(x_1) = x_2$.
- Näin jatketaan kunnes on päästy haluttuun tarkkuuteen, eli
$$|f(x_n) - x| < \text{haluttu tarkkuus},$$
missä $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ on tarkka arvo.

Saadaan jono arvoja, jotka *suppenevat* eli lähestyvät tarkkaa arvoa:
$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \to x, \qquad \text{kun } n \to \infty$$
On huolehdittava siitä, että jono suppenee!

Esimerkki (vrt. T1_teht3) Sovelletaan iteraatiota luvun π laskemiseen.

Merkitään yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion sivun pituutta a_n. Tällöin monikulmion piirin puolikas $\frac{n \cdot a_n}{2}$ antaa luvulle π sitä tarkempia likiarvoja mitä suurempi n on.



Lähdetään liikkeelle arvosta $n = 6$.
Palautuskaavalla
$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a_n^{\,2}}}}$$
saadaan arvot a_{12}, a_{24}, a_{48}, … ja vastaavat π:n likiarvot π_{12}, π_{24}, …

Laskimeen tämä voidaan ohjelmoida seuraavasti:

1. Asetetaan sivun pituudeksi 1 ($1 \rightarrow \mathrm{A}$) ja sivujen lukumääräksi 6 ($6 \rightarrow \mathrm{N}$). Nuolen saat TI-nspiressä $\boxed{\mathrm{ctrl}} + \boxed{\mathrm{var}}$ eli $\boxed{\mathrm{sto} \rightarrow}$.
2. Toistetaan komentojonoa (kaksoispisteen saat TI-nspiressä $\boxed{?\,!\,\triangleright}$)

$$\mathrm{A}/\sqrt{\left(2+\sqrt{(4-\mathrm{A}^2)}\right)} \rightarrow \mathrm{A}: 2*\mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}: \mathrm{N}*\mathrm{A}/2 \rightarrow \mathrm{P}$$

Ensimmäinen komento laskee muistipaikassa A olleen a_n:n avulla a_{2n} ja tallentaa sen A:han.
Toinen komento kaksinkertaistaa muistipaikassa N olleen sivujen lukumäärän ja tallentaa sen N:ään.
Kolmas komento laskee a_{2n}:n antaman likiarvon π_{2n} ja tallentaa sen muistipaikkaan P.
Kone ilmoittaa komentojonon suoritettuaan viimeisen laskutoimituksen tuloksen, tässä tapauksessa P:n arvon.

Painamalla ENTER:iä ensimmäisen kerran, saadaan siis π_{12}, painamalla uudestaan saadaan π_{24}, kolmannen kerran π_{48} jne.

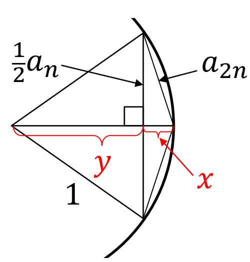
n	π_n
6	3,000 000 000
12	3,105 828 541
24	3,132 628 613
48	3,139 350 203
96	3,141 031 950
192	3,141 452 472
384	3,141 557 607
768	3,141 583 892
1536	3,141 590 463
3072	3,141 592 106
6144	3,141 592 516
12288	3,141 592 619

Vielä pitäisi osoittaa, että kaava

$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-{a_n}^2}}}$$

todella antaa säännöllisen $2n$-kulmion sivun pituuden.

Merkitään x:llä ja y:llä säteen osia → kuva.
Pythagorasta käyttäen saadaan



$$y = \sqrt{1-\frac{{a_n}^2}{4}},$$

josta $x = 1 - y = \ \dots = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4-{a_n}^2}$.
Siis

$${a_{2n}}^2 = \left(\tfrac{1}{2}a_n\right)^2 + x^2 = \frac{{a_n}^2}{4} + 1 - \sqrt{4-{a_n}^2} + 1 - \frac{{a_n}^2}{4}$$

$$\Rightarrow\ {a_{2n}}^2 = 2 - \sqrt{4-{a_n}^2} = \frac{\left(2-\sqrt{4-{a_n}^2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{4-{a_n}^2}\right)}{2+\sqrt{4-{a_n}^2}} \ \Rightarrow\ {a_{2n}}^2 = \frac{4-4+{a_n}^2}{2+\sqrt{4-{a_n}^2}}, \qquad \text{OK}$$