Johdantoa

Vanhan vitsin mukaan matematiikko tietää, kuinka matemaattinen ongelma ratkaistaan, mutta ei osaa tehdä niin. Vitsi on ajalta, jolloin käytännön laskut eli ongelman *numeerinen ratkaiseminen* täytyi suorittaa työläästi mekaanisella laskukoneella tai kynällä ja paperilla tai logaritmitaulukoilla tai laskutikulla (laskuviivain).

Tietokoneiden ja laskinten aikana vitsi ei enää toimi. (Paitsi, kun Pekka tapaa insinööriveljensä, niin käydään lähes aina seuraava keskustelu:
Pekka: Juha, mitä eroa on insinöörillä ja diplomi-insinöörillä?
Ja ennekuin Juha ehtii vastata, Pekka toteaa: ”Ei mitään, mutta DI ei tiedä sitä.”
Juha: Pekka, matematiikko tietää, että $1 + 2 = 2 + 1$, mutta ei tiedä paljonko se on.)

Siis laskimet hoitavat tylsän puurtamisen ja meidän tehtävä on keskittyä pohtimaan eli ajattelemaan. Laskimet ei vieläkään automaattisesti tee yhtään mitään!

Jokaisen matemaatikon olisi syytä osata edes alkeet jostakin perusohjelmistosta, joita ovat mm. (vain muutamia mainittu):

- MATLAB
- MAPLE
- MathCad
- Mathematica (verkossa Wolfram alpha)
- R (tilastollinen, ilmainen)
- SPSS (tilastollinen, yleinen ja maksullinen)
- Java
- Pascal
- C++
- PYTHON

omasta kämmenlaskimesta nyt puhumattakaan.
http://www.tietokone.fi/lehti/tietokone_11_1998/matematiikkaohjelmat_5983

→ *Opettele oman laskinohjelmistosi toiminnot niin hyvin, että tiedät mistä haluamasi toiminto = vaikutus löytyy!*

Kurssilla esitetyt menetelmät eivät ole uusimpia vaan alkeellisimpia ja useita satoja vuosia vanhoja, mutta edelleen toimivia. Lisäksi nämä on syytä tuntea, jotta voisi kehittyneempiä menetelmiä oppia.

MUISTA! *Laskin / ohjelmisto on hyvä renki, mutta huono isäntä!*

Numeerisen matematiikan tarkoitus on esittää, miten voidaan käsitellä likimääräisesti tehtäviä, joiden analyyttinen ratkaiseminen on hankalaa tai mahdotonta (käytettävillä tiedoilla).

Hyöty saavutetaan käytännön ongelmatilanteissa. Nimittäin harvoin tarvitaan tarkkaa vastausta, esim. puuparrun pituuden tuskin koskaan tulee olla $\sqrt{2300}$ metriä. Riittää likiarvo metrin tarkkuudella, n. 48 metriä.

Entä onko likiarvoilla laskemisessa jotain ”negatiivisia” asioita? On.
Nyt täytyy ottaa huomioon käsite *virhe* ja ennen kaikkea *virheen arvioiminen*. *Jokaiseen mittaukseen liittyy virhettä!* Se, miten hyvin osaa arvioida virhettä on eräänlainen mittari tekijän kyvykkyydestä käsitellä tarkasteltavaa asiaa/ongelmaa.

Virheen arviointi kuuluu oleellisena osana fysiikan ja kemian, mutta myös matematiikan, opiskelua. Selostustöissä ja raporteissa ”virheen arviointi – kappale” on ehkäpä tärkein osio.

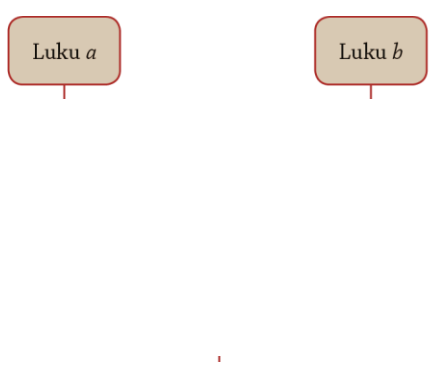
Kurssin aikana tehdään paljon tietokoneella laskuja ja perinteiset tietokoneharjoitukset jatkuvat. Myös koodin kirjoittaminen tulee mukaan.

Algoritmi

Läpi kurssin puhutaan algoritmeista. Mikä tai mitä algoritmi on?

Määritelmä, JUURI 12 s. 10:
Algoritmi on *yksityiskohtaisesti kuvattu vaiheittainen ohje/malli*, jolla annettu tehtävä voidaan suorittaa.

Esimerkki Harmoninen ka.
Kahden positiivisen luvun harmoninen keskiarvo lasketaan seuraavasti:
1) Muodostetaan lukujen käänteisluvut.
2) Lasketaan käänteislukujen ka.
3) Muodost. ed. vaiheen tuloksen käänteisluku.



→ **Harjoitus:** Määritä lukujen 5 ja 7 harmoninen keskiarvo.

KERTAUSTA?

1. Olkoot vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ seuraavasti määritelty:

$$\overline{a} = -2\overline{j} - \overline{k}, \qquad \overline{b} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + 8\overline{k}, \qquad \overline{c} = 6\overline{i} + 12\overline{j} - 3\overline{k}$$

a) Määritä vektori

$$\overline{r} = -3\overline{a} - \overline{b} + \frac{5}{3}\overline{c}\,.$$

sekä laske sen pituus.

b) Ovatko vektorit $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan?

c) Määritä $\overline{a}^{o}$.

2. a) Ratkaise epäyhtälö

$$-\frac{x+1}{2} - x \geq 2 - \frac{2x}{3}$$

ja esitä ratkaisu myös lukusuoramerkinnällä ja hakasulkumerkinnällä.

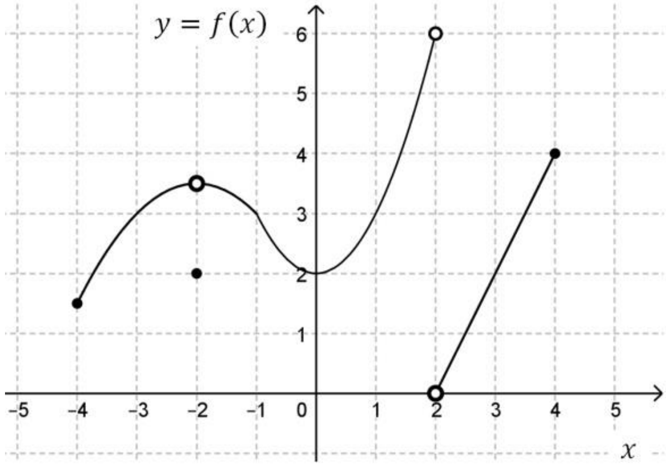
b) Polynomin $P(x) = ax^2 - 3x + 1$ eräs nollakohta on $x = -1$.

Määritä a ja ratkaise tämän jälkeen yhtälö $P(x) = 0$.

c) Ratkaise yhtälö (välivaiheet näkyviin) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

3. Määritä alla olevaa kuvaajaa hyödyntäen seuraavat raja-arvot. Riittää esim. kohta i) $= -3$.

i) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to 2+} f(x)$ **iii)** $\lim\limits_{x \to -4+} f(x)$



4. Derivoi määritelmän kautta funktio f,

$$f: f(x) = 2x^2 - 1.$$

Laske lisäksi derivaatan eli derivaattafunktion f' arvo kohdassa $x = -3$.

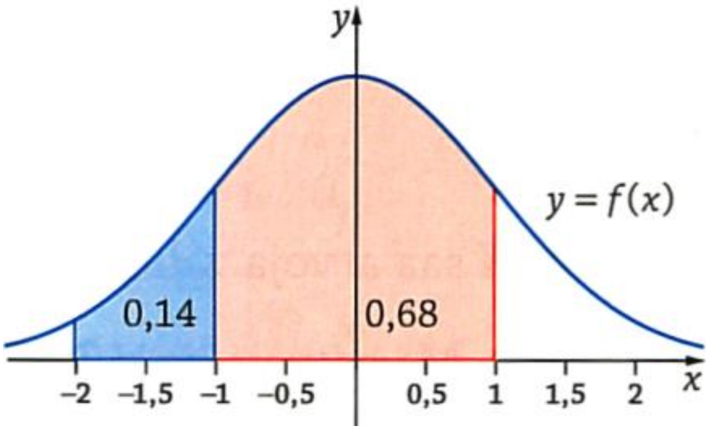
5. Integroi välivaiheineen

i) $\int \left(2x - \frac{1}{t}\right) dt$ ii) $\int_1^2 \sqrt{2x - 1}\, dx$.

6. Käyrän $y = e^x$ ja suoran $y = 1$, välillä $[-1, 1]$ rajoittama kaksiosainen alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske tilavuus.

7. Satunnaismuuttujan X tiheysfunktion f kuvaaja on y-akselin suhteen symmetrinen. Kuvaaja rajaa x-akselin kanssa välillä $[-2,-1]$ alueen, jonka pinta-ala $0,14$. Vastaavasti funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on $0,68$, kun $-1 \leq x \leq 1$. Määritä

i) $P(X \leq 0)$, ii) $P(X \geq 1)$, iii) $P(-2 < X \leq 0)$ ja iv) $P(X > 2)$



8. Sienikurssilla opetettiin tunnistamaan 78 erilaista sientä, joista kurssilainen oppi kuitenkin vain 49. Kuinka suurella todennäköisyydellä hän tunnisti oikein satunnaisesti esitetyt kuusi erilaista kurssilla opetettua sientä? [YO s1996/7]

9. Määritä sellainen vakio a kymmenen desimaalin tarkkuudella, että funktio

$$f:\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{x}, & \text{kun } x \leq -\ln 2 \\ a, & \text{kun } -\ln 2 < x \leq \ln 2 \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-x}, & \text{kun } \ln 2 < x \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Totea samalla, että f todella on tiheysfunktio (3 ehtoa). Voit hahmottaa tiheysfunktion f kuvaajaa Geogebralla.
b) Muodosta a) -kohdan tiheysfunktion f kertymäfunktio F. Määritä sitten todennäköisyydet

$$P(X \leq -\ln 2), \qquad P(-4 < X \leq 4)$$