Jakoyhtälö ja tekijälause

Osataan jakaa polynomeja jakokulmassa. Joskus jako meni tasan, joskus ei. Tarkastellaan tarkemmin tilannetta, kun jako menee tasan.

Lause, jakoyhtälö:
Olkoot $p(x)$ ja $q(x)$ polynomeja. Tällöin on olemassa sellaiset yksikäsitteiset polynomit $s(x)$ ja $r(x)$, että

$$p(x) = q(x)s(x) + r(x)$$

ja $r(x)$:n aste on pienempi kuin $q(x)$:n aste.

Todistus Sivuutetaan.

Jos jakaja $q(x)$ on ensimmäisen asteen polynomi $x - a$, niin jakoyhtälö tulee muotoon

$$p(x) = (x - a)s(x) + r,$$

missä jakojäännös r on vakio.
Kun nyt sijoitetaan $x = a$, saadaan $p(a) = (a - a)s(a) + r = r$.

Jakojäännös r voidaan siis laskea tässä tapauksessa (eli tapauksessa, jossa jakaja $q(x)$ on binomi $x - a$) itse jakolaskua suorittamatta!

Esimerkkejä
1) Määritä jakojäännös jakolaskussa $(x^2 - 2x + 7) : (3x + 2)$.
2) Määritä b siten, että $(x - 1)|(x^3 + bx + 1)$.
3) Määritä jakojäännös jakolaskussa $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 - x)$.

1) Jakoyhtälön nojalla

$$p(x) = (x^2 - 2x + 7) = (3x + 2)s(x) + r\ ,$$

joten sijoittamalla $x = -\frac{2}{3}$ (se x, millä $q(x) = 0$) saadaan

$$r = p\left(-\frac{2}{3}\right) = \ \dots\ = 8\frac{7}{9}\ .$$

2) Koska $r = 0$ (jako menee tasan), jakoyhtälö on

$$x^3 + bx + 1 = (x - 1)q(x)\ .$$

Sijoitetaan $x = 1$, saadaan

$$1^3 + b + 1 = (1 - 1)q(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2\ .$$

3) Jaettava on kolmatta astetta ja jakaja on toista astetta, joten jakojäännös on korkeintaan ensimmäistä astetta. Jakoyhtälöksi saadaan

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 - x)s(x) + \underbrace{(cx + d)}_{=r(x)}.$$

Jakaja $x^2 - x$ on nolla, kun $x = 1$ tai $x = 0$. Sijoitetaan nämä, saadaan

$$\begin{cases} 1 + 1 + 1 + 1 = (1 - 1)q(1) + (c \cdot 1 + d) \\ 0 + 0 + 0 + 1 = (0 - 0)q(0) + (c \cdot 0 + d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = c + d \\ 1 = d \end{cases},$$

josta saadaan $c = 3$ ja $d = 1$. Siis, jakojäännös $r(x) = 3x + 1$.

Jakoyhtälöstä seuraa välittömästi (yo. esimerkin mukaisesti).

Lause, tekijälause (tärkeä):
Polynomi $p(x)$ on jaollinen binomilla $x - a$, jos ja vain jos $x = a$ on polynomin $p(x)$ nollakohta. Toisin sanoen

$$(x - a) \mid p(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(a) = 0.$$

Tekijälauseesta taas seuraa (eli tekijälauseen avulla voidaan todistaa):

Lause, tekijöihinjakolause:
Jos polynomi

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0, \qquad a_n \neq 0$$

nollakohdat ovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$, niin

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Todistus ”Idea”, koska x_1 on $p(x)$:n nollakohta, niin tekijälause antaa

$$p(x) = (x - x_1)n(x),$$

missä polynomin $n(x)$ aste on yhtä pienempi kuin polynomin $p(x)$.

Edelleen, koska x_2 on myös $p(x)$:n nollakohta ja nyt tiedetään, että $p(x) = (x - x_1)n(x)$, niin x_2 on myös $n(x)$:n nollakohta, joten

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)m(x),$$

missä polynomin $m(x)$ aste yhtä pienempi kuin $n(x)$:n (ja kahta pienempi kuin $p(x)$:n aste). Näin jatketaan (kerroin a_n selviää kyllä…?).

Mitä me hyödytään näistä?

Kun on löydetty jollakin tavoin (seuraavilla tunneilla käydään yksi tapa) yksikin polynomin nollakohta, voidaan polynomi jakaa edellisten lauseiden nojalla. Eli on saatu pudotettua astetta (ainakin) yhdellä.

Tämä on siis jäänne ajalta, jolloin ei ollut ohjelmistoja. Huomaa lisäksi, että jotkin nollakohdat saattavat olla kompleksisia → tähän palataan.

Esimerkki Polynomi $p(x) = x^3 + 2ax^2 + bx - a$ on jaollinen $(x-2)$:lla. Kun $p(x)$ jaetaan $(x-1)$:llä, jää jakojäännökseksi 2. Määritä vakioiden a ja b arvot.

Ratkaisu Tekijälause antaa:

$$x^3 + 2ax^2 + bx - a = (x-2)(x^2 + cx + d).$$

Koska termin x^3 kerroin on yksi, niin myös termin x^2 kerroin on yksi. Tästä ei paljon hyödy, mutta tiedosta $(x-a)|p(x) \Leftrightarrow p(a) = 0$ hyödytään, sillä nyt

$$p(2) = 2^3 + 2a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - a = 0.$$

Saadaan, että $8 + 7a + 2b = 0$, eli

$$a = \frac{-2b - 8}{7}.$$

Toisaalta tekijälauseesta saadaan myös

$$p(1) = 1^3 + 2a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - a = 2.$$

Eli $1 + a + b = 2$, josta

$$a = -b + 1.$$

Näin ollen

$$a = a \quad \Leftrightarrow \quad -b + 1 = \frac{-2b-8}{7} \quad \Leftrightarrow \quad -7b + 7 = -2b - 8$$

$$\Leftrightarrow \quad -5b = -15 \quad \Leftrightarrow \quad b = 3 \quad \text{ja} \quad a = -3 + 1 = -2.$$

Vastaus $a = -2$ ja $b = 3$.