Korkeamman asteen polynomiyhtälö

Korkeamman asteen polynomilla tarkoitetaan polynomia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

missä $n \geq 3$.

Lause, Algebran peruslause:
Jokaisella polynomiyhtälöllä ($p(x)$ ei vakio) on ainakin yksi juuri.

Huom. Tulos on *olemassaololause*, joka ei anna menetelmää juuren eli ratkaisun löytämiseksi. Lisäksi juuri on *kompleksiluku* (muista $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$).

Lause, 3. asteen yhtälön $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$ ratkaisut:
Annetun kolmannen asteen yhtälön

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad a \neq 0$$

juuret saadaan Gardanon kaavoista (todistus → netti/kirja, proofwiki):

Kertoimet a, b, c ja d ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

missä

$$S = \sqrt[3]{\frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3} + \sqrt{\left(\frac{3ac - b^2}{9a^2}\right)^3 + \left(\frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}\right)^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{\frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3} - \sqrt{\left(\frac{3ac - b^2}{9a^2}\right)^3 + \left(\frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}\right)^2}}$$

Huomaa, että juuret x_2 ja x_3 ovat kompleksiliittolukuja keskenään, mikäli $(S - T) \neq 0$.

Lause, 4. asteen yhtälön $\boldsymbol{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0}$ ratkaisut:
Annetun neljännen asteen yhtälön

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \qquad a \neq 0$$

juuret saadaan Ferrarin kaavoista (todistus → netti/kirja, proofwiki):
Kertoimet a, b, c, d ja e ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$

$$x = \frac{-\left(\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4a}{c} + 4y_1}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4a}{c} + 4y_1}\right)^2 - 8\left(y_1 \mp \sqrt{{y_1}^2 - \frac{4e}{a}}\right)}}{4}$$

missä y_1 on 3. asteen yhtälön

$$y^3 - \frac{c}{a}y^2 + \left(\frac{bd}{a^2} - \frac{4e}{a}\right)y + \left(\frac{4ce}{a^2} - \frac{b^2e}{a^3} - \frac{d^2}{a^2}\right) = 0$$

reaalinen ratkaisu.

Entäpä 5. asteen yhtälö. Löytyykö vastaavanlainen menetelmä?
Vastaus: Ei löydy. Galois ja Abel 1800-luvun alkupuolella.

Niccolò Fontana Tartaglia.

Gerolamo Cardano

Évariste Galois

Niels Henrik Abel

Palataan maan pinnalle ja miten edes yksikin nollakohta voidaan löytää, jos polynomin aste on suurempaa kuin neljä?

Miksi nollakohdat kiinnostavat? Kun polynomin jokin nollakohta tavalla tai toisella on löydetty, saadaan polynomi tulomuotoon jakolaskulla.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots + a_1 x + a_0$$
$$= a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Tulomuoto kertoo eräällä tavalla enemmän kuin pelkkä termien summalauseke. Luvut $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat nollakohtia ja havaitaan, että niitä on siis kaiken kaikkiaan asteluvun ilmoittama määrä, nollakohtien monikerrat huomioiden.
Eli kolmannen asteen polynomin nollakohtia (kompleksisia) on 3 kpl. Neljännen asteen polynomilla 4 kpl ja n:nen asteen polynomilla n kpl.

Palataan kysymykseen. Polynomin tekijöihinjakolause edellyttää nollakohtien tuntemista. Kokonaislukukertoimisen polynomin rationaaliset nollakohdat löydetään aina seuraavan lauseen avulla.

Lause, polynomiyhtälön rationaaliratkaisut:
Jos yhtälön

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0$$

kertoimet ovat kokonaislukuja, ja jos yhtälöllä on supistetussa muodossa (eli syt$(r, s) = 1$) oleva rationaalinen ratkaisu

$$x = \frac{r}{s},$$

niin $r|a_0$ ja $s|a_n$.

Todistus. Tehtävä 188/ JUURI 12.

Esimerkki Ratkaise yhtälö $3x^3 + 5x^2 - 8x + 2 = 0$.

Vakiotermin kertoimen 2 tekijät ovat: $\pm1, \pm2$ ja 3. asteen termin kertoimen 3 tekijät ovat: $\pm1, \pm3$.
Näin ollen pitää kokeilla ratkaisuehdokkaat $x = \frac{r}{s}$, eli

$$\pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm2, \pm\frac{2}{3}\ .$$

Kun $\boldsymbol{x = 1}$:

$$3 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 2 = 3 + 5 - 8 + 2 = 2 \neq 0$$

Eli $x = 1$ **ei** ole nollakohta.

Kun $\boldsymbol{x = -1}$:

$$3 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 2 = -3 + 5 + 8 + 2 = 12 \neq 0$$

Eli $x = -1$ **ei** ole nollakohta.

Kun $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{1}{9} + \frac{5}{9} - \frac{8}{3} + 2 = 0$$

Eli $x = \frac{1}{3}$ **on** nollakohta.

Samalla tavoin voitaisiin käydä muutkin ehdokkaat läpi. Koska nyt on löydetty yksi nollakohta → jaetaan polynomi binomilla $x - \frac{1}{3}$. Jako menee tekijälauseen nojalla tasan, saadaan

$$3x^3 + 5x^2 - 8x + 2 = \left(x - \frac{1}{3}\right)(x^2 + 2x - 2).$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttäen löydetään loput nollakohdat $x = -1 \pm \sqrt{3}$, joten

$$\begin{aligned} 3x^3 + 5x^2 - 8x + 2 &= \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \left(-1 - \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(-1 + \sqrt{3}\right)\right) \\ &= (3x - 1)\left(x + 1 + \sqrt{3}\right)\left(x + 1 - \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$