ALGORITMIT MATEMATIIKASSA, MAA12

Polynomien jaollisuus

Esimerkki Olkoon $p(x) = 3x^2 + x - 4$. Osoita, että $(x-1)|p(x)$.
Jaetaan annettu polynomi $p(x)$ tekijöihin. Polynomin $p(x)$ nollakohdat ovat $x_1 = 1$ ja $x_2 = -4/3$, joten

$$p(x) = 3x^2 + x - 4 = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3(x-1)\left(x + \frac{4}{3}\right)$$
$$= (x-1)(3x+4)\ .$$

Tämähän tarkoittaa sitä, että binomi $(x-1)$ jakaa polynomin $p(x)$, eli

$$(x-1)|p(x)\ .$$

Sama asia yleisesti: Polynomi $p(x)$ on *jaollinen* polynomilla $q(x)$, jos on olemassa sellainen polynomi $s(x)$, että

$$p(x) = q(x)s(x)\ .$$

Tällöin sanotaan myös, että polynomi $q(x)$ on polynomin $p(x)$ *tekijä*, eli $q(x)$ *jakaa* $p(x)$:n ja tätä merkitään $q(x)|p(x)$. Kuten ed. kurssilla!

Jos polynomi $q(x)$ ei jaa polynomia $p(x)$, niin merkitään $q(x) \nmid p(x)$. Edelleen sanotaan, että polynomi $s(x)$ on polynomien $p(x)$ ja $q(x)$ *osamäärä*. Siis

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = q(x)s(x).$$

Esimerkki Olkoon $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, $q(x) = x - 2$ ja $s(x) = x^2 + 1$. Kertomalla $q(x)$ ja $s(x)$ havaitaan, että

$$p(x) = q(x)s(x).$$

Siis $q(x)|p(x)$, mutta myös $s(x)|p(x)$!
Tulon $q(x)s(x)$, eli polynomin $p(x)$ aste 3 on tekijöiden $q(x)$ ja $s(x)$ asteiden 1 ja 2 summa. Tämä pätee yleisesti.

Lause, tulon ja osamäärän aste:
Polynomien tulon aste on tekijöiden asteiden summa. Polynomien osamäärän aste on jaettavan ja jakajan asteiden erotus.

Huomautus **1)** Palautetaan mieleen, että polynomin termin ax^k aste on k, jos $a \neq 0$. Nollannen asteen termi on siis vakiotermi, $a \neq 0$.

2) Nollapolynomissa 0 ei ole edes vakiotermiä, joten sen astetta ei määritellä.
3) Jokainen polynomi on jaollinen nollapolynomista eroavalla vakiopolynomilla.

Esimerkki Suorita jakolasku $(x^3 - x - 6) : (x^2 + 2x + 3)$.
Polynomien asteista havaitaan, että osamäärän aste on $3 - 2 = 1$. Eli saadaan ensimmäisen asteen polynomi (suora), mikäli jako menee tasan. Merkitään tätä osamäärää $ax + b$. Nyt kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}(x^3 - x - 6) &= (ax + b)(x^2 + 2x + 3) \\ &= ax^3 + 2ax^2 + 3ax + bx^2 + 2bx + 3b \\ &= ax^3 + (2a + b)x^2 + (3a + 2b)x + 3b\end{aligned}$$

Vertaamalla termien kertoimia saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 3a + 2b = -1 \\ 3b = 6 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $a = 1$ ja $b = -2$, siis osamäärä on binomi

$$x - 2\,.$$

HUOM! Jako meni tasan.

Kertausta jaettava $=$ jakaja $\times$ (vaillinainen) osamäärä $+$ jakojään.

Luvuilla:	37	$=$	5	$\times$	7	$+$	2
Yleisesti:	p	$=$	s	$\times$	q	$+$	r
Polynomeilla:	$p(x)$	$=$	$q(x)$	$\times$	$s(x)$	$+$	$r(x)$

missä $q(x)$:n ja $s(x)$:n asteet ovat pienempiä kuin $p(x)$:n aste ja toisaalta $r(x)$:n aste on pienempi kuin $q(x)$:n aste.

Polynomien jakokulma

Esimerkki **a)** Laske $\frac{13x^4 - 5x^3 + 4x}{2x}$, **b)** $\frac{13x^4 - 5x^3 + 4x - 3}{2x}$, **c)** $\frac{13x^4 - 5x^3 + 4x}{2x - 1}$

a) Havaitaan, että jakajana on monomi (siis vain 1 termi). Osoittaja voidaan supistaa x:llä, siis

$$\frac{\overbrace{13x^4 - 5x^3 + 4x}^{=p(x)}}{\underbrace{2x}_{=s(x)}} = \frac{13x^4}{2x} - \frac{5x^3}{2x} + \frac{4x}{2x} = \overbrace{\frac{13x^3}{2} - \frac{5x^2}{2} + 2}^{=q(x)}$$

Huom! Jako menee tasan.

b) Muuten sama, mutta vakiotermi -3 lisäksi:

$$\frac{\overbrace{13x^4-5x^3+4x-3}^{=p(x)}}{\underbrace{2x}_{=s(x)}} = \ldots = \overbrace{\frac{13x^3}{2}-\frac{5x^2}{2}+2}^{=q(x)} - \overbrace{\frac{3}{2x}}^{=r(x)}$$

Huom! Jako ei mene tasan.

c) Nyt jakajana ei ole monomi → jakokulma (ellei osoittaja voida jakaa tekijöihin siten, että eräs tekijä on jakaja): Muista "lokerointi", eli jokaiselle asteelle oma sarake

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & \frac{13}{2}x^3 & +\frac{3}{4}x^2 & +\frac{3}{8}x & +\frac{35}{16} & \\
\hline
2x-1 & 13x^4 & -5x^3 & & +4x & -3 \\
 & \mp 13x^4 & \pm\frac{13}{2}x^3 & & & \\
\cline{2-3}
 & — & +\frac{3}{2}x^3 & & & \\
 & & \mp\frac{3}{2}x^3 & \pm\frac{3}{4}x^2 & & \\
\cline{3-4}
 & & — & +\frac{3}{4}x^2 & & \\
 & & & \mp\frac{3}{4}x^2 & \pm\frac{3}{8}x & \\
\cline{4-5}
 & & & — & +\frac{35}{8}x &
\end{array}$$

Saadaan

$$\underbrace{13x^4-5x^3+4x-3}_{p(x)} = \underbrace{(2x-1)}_{q(x)}\underbrace{\left(\frac{13}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{8}x+\frac{35}{16}\right)}_{s(x)} \underbrace{-\frac{13}{16}}_{r(x)}$$

Jakoalgoritmin vaiheet ovat seuraavat (**c)-kohta**):

1. Jaettava ja jakaja järjestetään jakokulmaan alenevien potenssien mukaiseen järjestykseen. Jaettavassa tulee jättää tyhjä tila puuttuvaa astelukua olevan termin kohdalle.
2. Osamäärän ensimmäinen termi saadaan jakamalla jaettavan ensimmäinen termi jakajan ensimmäisellä termillä. Siis $13x^4 : 2x = \frac{13}{2}x^3$.
3. Saadulla osamäärän termillä kerrotaan jakaja $2x-1$ ja tulos $13x^4 - \frac{13}{2}x^3$ vähennetään jaettavan vastaavista termeistä. Vähennyslasku kannattaa muuttaa yhteenlaskuksi, jolloin vähentäjän etumerkit on vaihdettava. Uudet etumerkit vanhojen yläpuolelle.
4. Jaettavaksi otetaan saatu erotus $\frac{3}{2}x^3$ täydennettynä lopuilla alkuperäisen jaettavan termeillä. Yleensä näitä "pudotetaan" käsittelyyn vain, jos vastaavan korkuinen termi muodostuu seuraavassa kertomisvaiheessa.
5. Osamäärän toinen termi löytyy kuten ensimmäinenkin. Menettelyä jatketaan, kunnes jaettavan asteluku on pienempi kuin jakajan. Jakojäännös ratkaisee , meneekö jako tasan.