Numeerinen integrointi

Numeerinen integrointi keskittyy täysin määrätyn integraalin tarkasteluun. Eli halutaan määrittää esimerkiksi pinta-ala tai tilavuus (siis jokin reaaliluku) numeerisilla menetelmillä:

- suorakaidesääntö,
- puolisuunnikassääntö ja
- Simpsonin sääntö,

joista Simpsonin sääntö on tarkin/tehokkain.

Numeerinen integrointi on erittäin tehokas tapa saada jokin likiarvo, kun integroitavana on funktio f, jolle ei löydy integraalifunktiota F alkeisfunktioiden joukosta. Esimerkiksi mitä olisi (tarkasti)

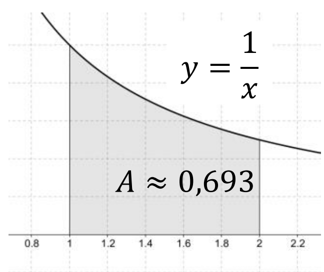
$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\, dx, \qquad \int_{0,2}^{0,8} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx, \qquad k \neq 0\,.$$

Näitä ei siis tiedetä (alkeisfunktioiden kautta). Mutta…

Kertaus
Integraalilaskennassa on tulos: *Jatkuvalla funktiolla f on aina olemassa integraalifunktio F, vaikka sitä ei eksplisiittisesti voidakaan esittää.*

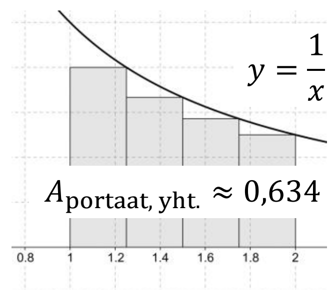
Porrassummat ja suorakaidesääntö

Alkupala: Tiedetään, että $\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \ln 2 \approx 0{,}6931$ ja että kyseinen arvo (reaaliluku, määrätty integraali kyseessä) on käyrän $y = \frac{1}{x}$ ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $[1{,}2]$. Kuinka suuri suhteellinen virhe tehdään, kun kyseistä pinta-alaa arvioidaan suorakaiteilla, joiden leveys on $0{,}25$ ja korkeus saadaan y:n arvosta välin loppupisteissä:
$y\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{5} = 0{,}8$, $y\left(\frac{6}{4}\right) = \frac{4}{6} = 0{,}67$, $y\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{4}{7} = 0{,}57$ ja $y\left(\frac{8}{4}\right) = 0{,}5$.



Suhteellinen virhe:

$$\frac{|x - x'|}{|x|} = \frac{0{,}693 - 0{,}634}{0{,}693}$$
$$= 0{,}085\,1 \approx 8{,}5\%$$



Porrassummat:
Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio. Jos tunnetaan f:n integraalifunktio F, niin määrätty integraali (pinta-ala)

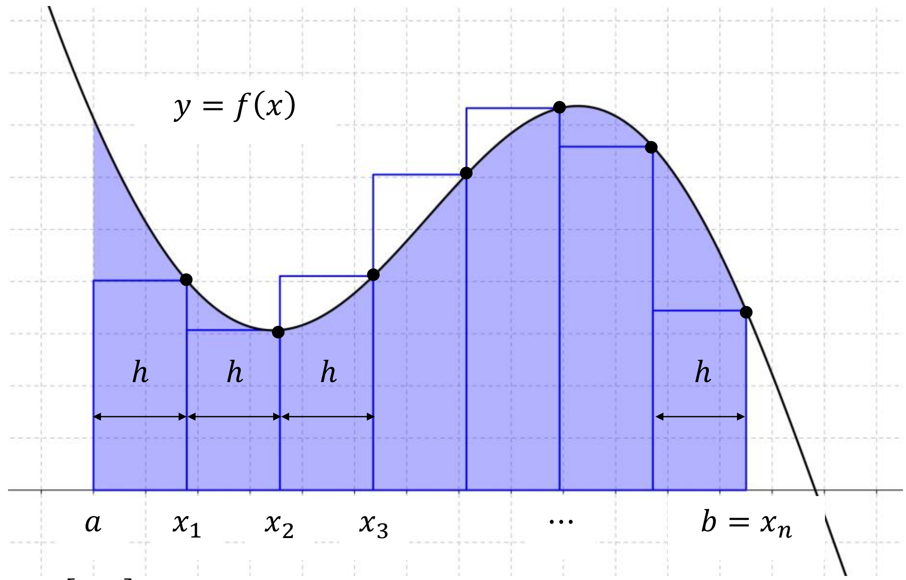
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

saadaan laskettua. Muussa tapauksessa käytetään numeerisia menetelmiä.
Olkoon P välin $[a, b]$ tasavälinen jako n:ään yhtäsuureen osaan, jolloin osavälin pituus $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$. Tällöin jakoon P liittyy porrassumma

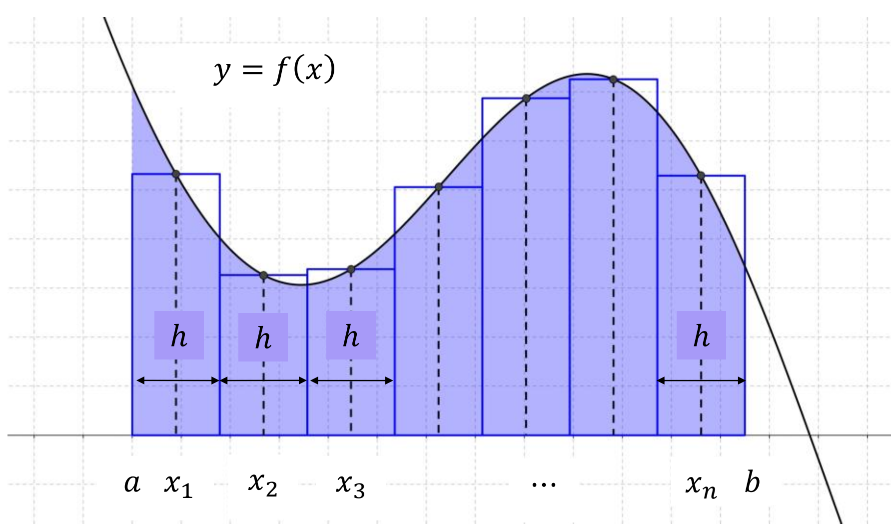
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)h = f(x_1)h + f(x_2)h + \ldots + f(x_n)h,$$

missä x_1 on ensimmäisellä osavälillä, x_2 on toisella, …, ja x_n on viimeisellä osavälillä.

Määrätty integr. $\int_a^b f(x)\,dx$ on porrassumman raja-arvo, kun $n \to \infty$. Siksi yksittäinen porrassumma antaa integraalille likiarvon, kun osaväli $h = \Delta x$ on riittävän pieni.



Välin $[a, b]$ tasavälinen jako n yhtä suureen osaan. Portaan korkeus on laskettu osavälin **pääte**pisteestä.
Huom! Ei ole väliä mistä osavälin kohdasta otetaan portaan korkeus.



Välin $[a, b]$ tasavälinen jako n yhtäsuureen osaan, kuten edellä. Nyt portaan korkeus on laskettu osavälin **keski**pisteestä.
Miksi ei ole väliä? Kun $n \to \infty$, niin $h = \Delta x \to 0$ ja

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)h \to \int_a^b f(x)\, dx$$

Määritelmä, *ala- ja yläporrassumma*:
Olkoon f välillä $[a,b]$ määritelty jatkuva funktio, ja olkoon P välin $[a,b]$ jako n yhtä suureen osaan. Olkoot $m_1, m_2, \dots, m_n$ funktion f pienimmät arvot ja $M_1, M_2, \dots, M_n$ funktion f suurimmat arvot jakoväleillä.
Tällöin jakoon P liittyvä *alasumma* on

$$s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ \dots + m_n\Delta x$$

ja *yläsumma*

$$S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ \dots + M_n\Delta x.$$

Jos lisäksi f on ei-negatiivinen ja A on sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrä $y = f(x)$, x-akseli ja suorat $x = a$ ja $x = b$, niin pätee

$$s_n \leq A \leq S_n.$$

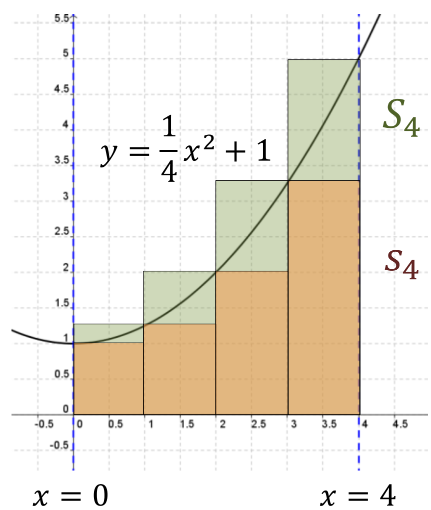
Likiarvon $A \approx \frac{1}{2}(s_n + S_n)$ virhe (virheen itseisarvo) on tällöin enintään $\frac{1}{2}(S_n - s_n)$. (Kirjan kuvat s. 112-114, JUURI12)

Esimerkki Tarkastellaan funktiota $f: f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Koska se on positiivinen ja kasvava välillä $[0,4]$, niin se saa pienimmän arvonsa jakovälin alkupisteessä ja suurimman arvon loppupisteessä.

Kun väli $[0,4]$ jaetaan neljään yhtä suureen osaan, vastaavat ala- ja yläsummat ovat :

$$s_4 = 1 \cdot 1 + \tfrac{5}{4} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \tfrac{13}{4} \cdot 1 = 7\tfrac{1}{2}$$

$$S_4 = \tfrac{5}{4} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \tfrac{13}{4} \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 11\tfrac{1}{2}$$



Joten pinta-alalle, virheelle ja tulokselle saadaan

$$A \approx \frac{1}{2}\left(7\tfrac{1}{2} + 11\tfrac{1}{2}\right) = 9{,}5 \ , \qquad \delta A = \frac{1}{2}\left(11\tfrac{1}{2} - 7\tfrac{1}{2}\right) = 2{,}0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 9{,}5 \pm 2{,}0$$

Alla olevaan taulukkoon on laskettu tiheneviä jakoja vastaavia ala- ja yläsummia, niiden keskiarvoina saadut likiarvot alalle A sekä näiden likiarvojen maksimivirheet

Jako-välejä n	Alasumma s_n	Yläsumma S_n	A:n likiarvo $\frac{1}{2}(s_n + S_n)$	A:n likiarvo $\frac{1}{2}(S_n - s_n)$	Arvio A:lle
4	7,5	11,5	9,5	2,0	$A \approx 9{,}5 \pm 2{,}0$
10	8,56	10,16	9,4	0,8	$A \approx 9{,}4 \pm 0{,}8$
100	9,254	9,414	9,33	0,08	$A \approx 9{,}33 \pm 0{,}08$
1000	9,3253	9,3413	9,333	0,008	$A \approx 9{,}333 \pm 0{,}008$
10000	9,3325	9,3341	9,3333	0,0008	$A \approx 9{,}3333 \pm 0{,}0008$

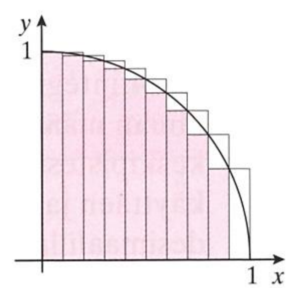
Ala-ja yläsummat (tarkemmin arvot m_k ja M_k) voivat olla hankalia määrittää, jos funktio on haastava. Tällöin voi hyödyntää *välisummaa*,

$$S_{\text{väli},n} := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x\,,$$

jossa arvoille $f(t_k)$ pätee: $m_k \leq f(t_k) \leq M_k$ kaikilla osaväleillä. Näin ollen välisummalle on $s_n \leq S_{\text{väli}} \leq S_n$ ja rajankäynti antaa pinta-alan, koska välisumma on aina ala- ja yläsumman välissä.

Esimerkki T – 139 / Calculus 7

Laske yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ neljänneksen alan likiarvo suorakaidemenetelmällä osavälien lukumäärän ollessa 10. Olkoon S_{10} likiarvo, joka saadaan käytettäessä osavälien alkupisteitä, ja s_{10} likiarvo käytettäessä loppupisteitä. Määritä keskiarvo $\frac{1}{2}(S_{10} + s_{10})$ ja laske sen suhteellinen virhe.



Väli $[0,1]$ ja 10 porrasta → yhden portaan leveys eli osavälin pituus on näin ollen 0,1 (tasavälisellä jaolla).

Yksikköympyrän tarkasteltava osa vastaa funktiota $f: f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ja tarkasteluvälillä f on aidosti vähenevä. Niinpä f saa osavälien alkukohdissa kyseisen osavälin suurimman ja loppukohdissa pienimmän arvonsa. Saadaan

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} m_k \Delta x = f(0{,}1) \cdot 0{,}1 + \ldots + f(1{,}0) \cdot 0{,}1 = 0{,}7261 \ldots$$

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} M_k \Delta x = f(0{,}0) \cdot 0{,}1 + \ldots + f(0{,}9) \cdot 0{,}1 = 0{,}8261 \ldots$$

Siispä

$$\frac{1}{2}(s_n + S_n) \approx 0{,}776129$$

ja suhteellinen virhe

$$\frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(S_n + s_n)}{\frac{\pi}{4}} = \frac{0{,}009268 \ldots}{0{,}7853 \ldots} = 0{,}011801 \ldots \approx 0{,}012.$$