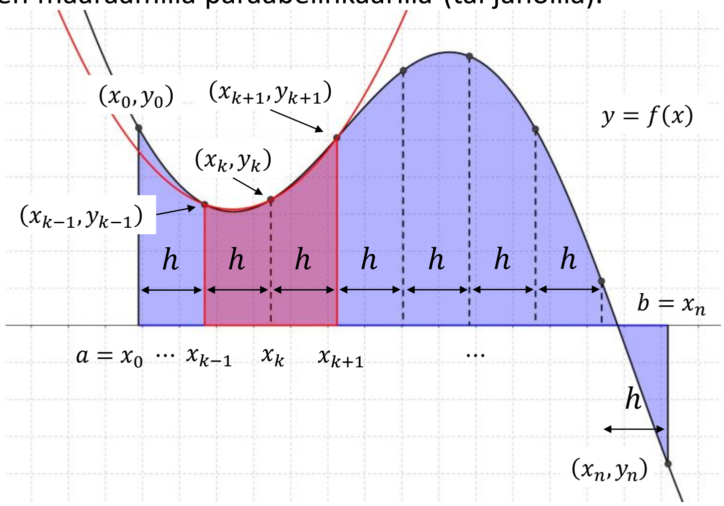
Simpsonin sääntö

ALGORITMIT MATEMATIIKASSA, MAA12

Olkoot f ja P kuten aiemmin.

Simpsonin säännössä käyrä $y = f(x)$ korvataan peräkkäisten pistekolmikoiden määräämillä paraabelinkaarilla (tai janoilla).



Pisteiden (x_0, y_0), (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) määräämän paraabelin tai suoran yhtälö

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

sievenee muotoon

$$y = \frac{y_0}{2h^2}(x - x_1)(x - x_2) - \frac{y_1}{h^2}(x - x_0)(x - x_2) + \frac{y_2}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Näin saadulle funktiolle $y = p(x)$ pätee

$$\int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Kirjassa menetelmä esitelty välivaiheiden kanssa esimerkein. Integrointia tarvitaan → 10-kurssi. Otetaan tulos käyttöön!

Kun menetellään samoin väleillä $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$, … , $[x_{n-2}, x_n]$, (**missä n:n on oltava parillinen**) ja lasketaan tulokset yhteen, niin saadaan Simpsonin sääntö.

Lause, Simpsonin sääntö:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ \dots + 4y_{n-1} + y_n).$$

Huom Päätyarvot lasketaan vain kerran ja väliarvot vuorotellen nelin- ja kaksinkertaisina.

Simpsonin säännön virhekaava

Simpsonin säännön likiarvofunktio näyttää myötäilevän funktiota f paremmin kuin puolisuunnikassäännön. Voidaan todistaa, että jos f on neljästi derivoituva, niin on voimassa *Simpsonin säännön virhekaava*

$$\int_a^b f(x)\,dx - S = -\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)(b-a),$$

missä $\xi \in [a, b]$ on tietty (yleensä tuntematon) luku.

Mikäli tiedetään vain tekijän $\left|f^{(4)}(\xi)\right|$ yläraja, niin on käytettävä yo. kaavaa muodossa

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S\right| = \frac{h^4}{180}\left|f^{(4)}(\xi)\right||b-a|.$$

Havaitaan, että Simpsonin säännön virhe on likimäärin verrannollinen jakovälin pituuden h neljänteen potenssiin
Jos siis jakoväli h puolitetaan, eli jakopisteiden määrä n kaksinkertaistetaan, niin virhe vähenee yleensä likimäärin *kuudestoista*osaan.

Huomaa, että Simpsonin sääntö on todellakin tehokkaampi kuin puolisuunnikassääntö.

Lisäksi Simpsonin sääntö laskee kaikkien kolmannen asteen polynomien integraalit tarkasti, vaikka likiarvofunktio on muodostettu polynomeista, joiden aste on korkeintaan kaksi.

Tietokoneharjoitus 2:ssa tehtävänä on laskea kaikilla numeerisilla integrointimenetelmillä integraalin $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ likiarvoja eri osavälijaoilla. Havaitaan, että Simpsonin sääntö toimii tehokkaimmin.

Simpsonin sääntö laskimella
Integraalin likiarvo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

voidaan kirjoittaa osissa

$$S_1 = \frac{h}{3}(y_0 + y_n),$$

$$S_2 = \frac{2h}{3}(y_1 + y_2 + \ \dots\ + y_{n-1}),$$

$$S_3 = \frac{2h}{3}(y_1 + y_3 + \ \dots\ + y_{n-1}).$$

Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_1 + S_2 + S_3.$$

Esimerkki Lasketaan sama integraali $I = \int_{-1}^{2} e^{-x^2}\,dx$ jakamalla väli $[-1,2]$ kolmeenkymmeneen osaan (ohjelmointi).
Aluksi näyttötilassa kirjoitetaan

$$y1 = e\text{^}(-x^2).$$

```
PROGRAM:SIMPSON
:Input A
:Input B
:Input N
:(B-A)/N →H
:0→S1
:0→S2
:0→S2
:0→S
:(y(A)+y(B))*H/3 →S1
:Sumseq (y(A+K*H),K,1,N-1,1) →S2
:2*H*S2/3→S2
:Sumseq (y(A+K*H),K,1,N-1,2) →S3
:2*H*S3/3→S3
:S1+S2+S3 →S
:Disp S
```

Pitäisi tulla $I \approx S = 1{,}628\ 905\ 931\ 85$. Laskimen **fnInt**-toiminto antaa tulokseksi $I = 1{,}628\ 905\ 523\ 57$ ja suhteelliseksi virheeksi tulee: $|S - I|/I \cdot 100\% \approx 0{,}000\ 025\%$. Eli paljon pienempi kuin aiemmin!