Puolisuunnikassääntö

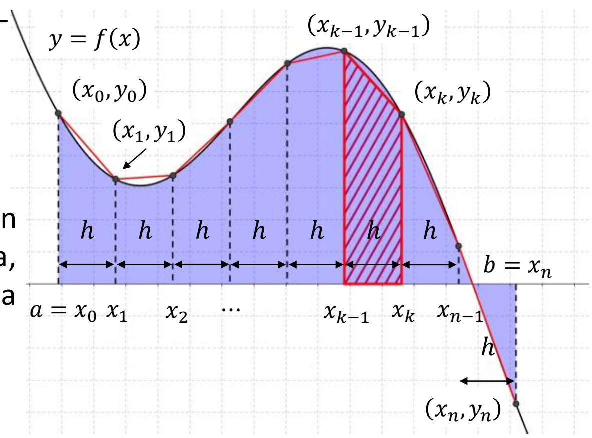
Olkoot f ja P kuten suorakaidesäännössä. Jakopisteet: $a = x_0$, x_1, …, $x_n = b$, jolloin $x_k = a + kh$, missä $h = \frac{b-a}{n}$.

Puolisuunnikassäännössä käyrä $y = f(x)$ korvataan kullakin jako- eli osavälillä pisteiden (x_{k-1}, y_{k-1}) ja (x_k, y_k) yhdysjanalla. Osavälin $[x_{k-1}, x_k]$ yli laskettu integraali korvautuu tällöin lausekkeella

$$\frac{y_{k-1} + y_k}{2} \cdot h\,.$$

Jos $f \geq 0$, niin kyseessä on sen puolisuunnikkaan ala, jonka kannat ovat y_{k-1} ja y_k sekä korkeus

$$h = x_k - x_{k-1}.$$



Näin ollen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \ \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h\,,$$

mikä sievenee muotoon:

Lause, Puolisuunnikassääntö:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ \ldots\ + 2y_{n-1} + y_n)$$

Voidaan myös kirjoittaa muodossa (kun $y = f(x)$)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ \ldots\ + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right].$$

Huom Kaikki muut funktion eli käyrän arvot paitsi ensimmäinen ja viimeinen lasketaan kahdesti, koska kyseiset puolisuunnikkaan sivut ovat kahdessa eri puolisuunnikkaassa. Kirjassa lisää säännön tarkastelua.

Ohjelmoidaan puolisuunnikassääntö laskimiin:
Kirjoitetaan lauseke ensin muotoon

$$\underbrace{\frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \ \dots + y_n)}_{=T} = \underbrace{\frac{h}{2}(y_0 + y_n)}_{=T_1} + \underbrace{h(y_1 + \ \dots + y_{n-1})}_{=T_2}$$

ja lasketaan luvut T_1 ja T_2 erikseen.

Esimerkki Lasketaan integraali $I = \int_{-1}^{2} e^{-x^2}\, dx$ jakamalla väli $[-1,2]$ kolmeenkymmeneen osaan (ohjelmointi).

Ohjelmointitila löytyy TI-nspirestä:
1. Valitse ensin **Uusi asiakirja** – toiminto ja **1.Lisää Laskin**
2. Sitten **menu** ja **9:Funktiot ja ohjelmat** ja sieltä 1

Seuraavanlainen ohjelmointi pitäisi saada aikaiseksi, ohjelman nimenä on PUOLISUUN (puolisuunnikassääntö).
Aluksi näyttötilassa kirjoitetaan

$$y1 = e\hat{}(-x^2).$$

TI-nspiressä hieman erilainen koodi !!!

PROGRAM:PUOLISUUN	
:**Input** A	Syötetään alaraja.
:**Input** B	Syötetään yläraja.
:**Input** N	Syötetään jakovälien lukumäärä n.
: y(x):=funktion lauseke	Syötetään funktion lauseke.
:(B-A)/N →H	Lasketaan jakovälin pituus h.
:0→T1	Nollataan muistipaikka T1.
:0→T2	Nollataan muistipaikka T2.
:0→T	Nollataan muistipaikka T.
:(y(A)+y(B))*H/2 →T1	Lasketaan T_1 muistipaikkaan T1.
:**For** (K,1,N-1,1)	Silmukka alkaa.
:T2+y(A+K*H) →T2	Lasketaan $y_1 + \ \dots + y_{n-1}$ T2:een.
:**End**	Silmukka päättyy.
:T2*H →T2	Kerrotaan T2:n sisältö h:lla.
:T1+T2 →T	Lasketaan $T_1 + T_2$ muistipaik. T.
:**Disp** T	Tulostetaan T.

Pitäisi tulla $I \approx T = 1{,}628\ 231\ 236\ 53$. Laskimen **fnInt**-toiminto antaa tulokseksi $I =$**fnInt**$(y_1, x, -1, 2) = 1{,}628\ 905\ 523\ 57$ ja suhteellisek-si virheeksi tulee: $(T - I)/I \cdot 100\% \approx 0{,}041\%$.

Puolisuunnikassäännön virhekaava

Voidaan todistaa, että jos f on kahdesti derivoituva, niin on olemassa *puolisuunnikassäännön virhekaava*

$$\int_a^b f(x)\,dx - T = -\frac{h^2}{12} f''(\xi)(b-a),$$

missä $\xi \in [a, b]$ on tietty (yleensä tuntematon) h:sta riippuva luku.
Mikäli tiedetään vain tekijän $|f''(\xi)|$ yläraja, niin emme saa selville virheen merkkiä vaan on käytettävä yo. Kaavaa muodossa

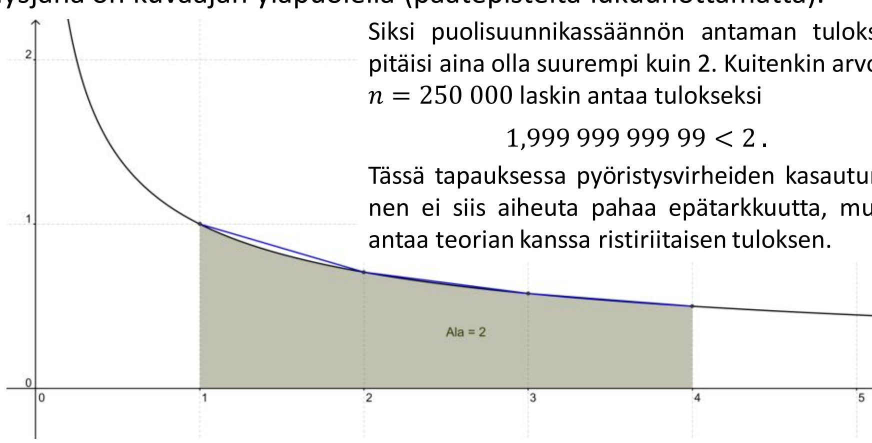
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T\right| = \frac{h^2}{12} |f''(\xi)||b-a|.$$

Havaitaan, että virhe on likimäärin verrannollinen jakovälin pituuden h neliöön (koska h:oon muuttuessa muuttuu yleensä myös ξ). Toisin sanoen virhe on kääntäen verrannollinen jakopisteiden lukumäärän n neliöön, muista $h = \frac{b-a}{n}$.
Jos siis jakoväli h puolitetaan, eli jakopisteiden määrä n kaksinkertaistetaan, niin virhe vähenee yleensä likimäärin neljäsosaan.

Esimerkki Integraalin

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

tarkka-arvo on 2.
Integroitavan funktion kuvaaja on alaspäin kupera (eli on jokaisen tangenttinsa yläpuolella). Tästä seuraa, että kuvaajan kahden pisteen yhdysjana on kuvaajan yläpuolella (päätepisteitä lukuunottamatta).



Siksi puolisuunnikassäännön antaman tuloksen pitäisi aina olla suurempi kuin 2. Kuitenkin arvolla $n = 250\,000$ laskin antaa tulokseksi

$$1{,}999\,999\,999\,99 < 2\,.$$

Tässä tapauksessa pyöristysvirheiden kasautuminen ei siis aiheuta pahaa epätarkkuutta, mutta antaa teorian kanssa ristiriitaisen tuloksen.