# Virhe



**Määritelmä, virhe:**
Virhe on suureen likiarvon poikkeama tarkasta arvosta. Siis

$$\text{virhe} = |\text{tarkka arvo} - \text{likiarvo}|.$$

Tämä on ns. *absoluuttinen virhe*. Sama asia matemaattisin merkinnöin

$$\delta x = \Delta x = |x - x'|,$$

missä $x =$ tarkka arvo ja $x' =$ likiarvo.
*Suhteellinen virhe* on virheen suhde tarkan arvon itseisarvoon, eli

$$\text{suhteellinen virhe} = \frac{\text{virhe}}{|\text{tarkka arvo}|} = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{|x - x'|}{|x|},$$

missä $x \neq 0$. Suhteellinen virhe ilmoitetaan usein prosentteina.

**Huom! a)** Absoluuttinen virhe ei kerro onko likiarvo suurempi vai pienempi kuin tarkka arvo, koska itseisarvo (etäisyys).
**b)** Absoluuttisia virheitä ei (välttämättä) voida verrata keskenään, suhteellisia virheitä voidaan. Siksi lähes aina lasketaan myös suht. virhe.

Virhettä ei voida yleensä laskea tarkasti. Usein riittää, että tiedetään virheen suuruusluokka tai yläraja. Toisaalta, desimaaliluvun katkaisu- ja pyöristysääntöjen nojalla tiedetään, että luvun $x \approx 0{,}123$ tarkka arvo on välillä $0{,}1225 \leq x < 0{,}1235$. Tällöin likiarvon poikkeama on enintään $0{,}0005$. Yleisesti pätee:

*Luvun poikkeama $n$-desimaalisesta likiarvosta on enintään*
$$5 \cdot 10^{-(n+1)}.$$

**Esimerkkejä**
**1.** Luvun $\pi$ kaksi- ja kolmidesimaaliset likiarvot ovat $3{,}14$ ja $3{,}142$. Koska

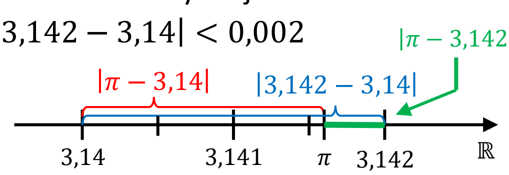
$$3{,}14 < \pi < 3{,}142,$$

niin yo. kaksidesimaalinen likiarvo on luvun $\pi$ *alalikiarvo* ja kolmidesimaalinen sen *ylälikiarvo*. Niiden poikkeamat luvun $\pi$ tarkasta arvosta ovat $|\pi - 3{,}14|$ ja $|\pi - 3{,}142|$. Poikkeamien ylärajat ovat

$$|\pi - 3{,}14| < |3{,}142 - 3{,}14| < 0{,}002$$

ja

$$|\pi - 3{,}142| < 0{,}0005\,.$$



**Esimerkkejä(jatkuu)**

**2.** Kuinka suuri suhteellinen virhe enintään tehdään, kun luvulle $\pi$ käytetään likiarvoa $3{,}142$ (eikä tunneta luvun $\pi$ muita desimaaleja)?
Koska

$$3{,}14 < \pi < 3{,}142,$$

saadaan

$$\frac{|\pi - 3{,}142|}{\pi} = \frac{0{,}000\ 5}{3{,}14} < 1{,}59 \ldots \cdot 10^{-4} \approx 0{,}016\ \%.$$

Käytetään pienintä arvoa!

**3.** Kuinka suuri suhteellinen virhe enintään tehdään, kun luvun $\pi$ neliön laskemisessa käytetään likiarvoa $3{,}142$ (eikä tunneta luvun $\pi$ muita desimaaleja)?
Koska $3{,}14 < \pi < 3{,}142$, saadaan $|\pi^2 - 3{,}142^2| = (3{,}142^2 - \pi^2) = (3{,}142 + \pi) \cdot (3{,}142 - \pi) < (2 \cdot 3{,}142) \cdot (0{,}000\ 5) = 0{,}003142$.
Edelleen suhteelliselle virheelle tulee yläraja

$$\frac{|\pi^2 - 3{,}142^2|}{\pi^2} = \frac{0{,}003\ 142}{3{,}14^2} < 3{,}186 \ldots \cdot 10^{-4} \approx 0{,}032\ \%.$$

**Yhteenvetoa:**

Likiarvon tarkkuus voidaan ilmoittaa:

1. Merkitsevien numeroiden lukumäärällä,
2. Desimaalien lukumäärällä (yksikkö mukana),
3. Viimeisen numeron luku- tai mittayksiköllä ja
4. Antamalla virheen yläraja, joka tavallisesti ilmoitetaan yhdellä merkitsevällä numerolla ylöspäin pyöristettynä.

**Esimerkki** Mittaustulos $0{,}0320 \pm 0{,}0003$ kg on annettu

1. Kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella,
2. Neljän desimaalin tarkkuudella (yksikkönä kilogramma),
3. Desigramman tarkkuudella ja
4. Virheen $\pm 0{,}0003$ kg tarkkuudella.

Jos suureen tarkkaa arvoa ei ole tai sitä ei tunneta, ei likiarvon/mittaustuloksen virhettäkään voi laskea tarkasti. → Ei väliä, sillä riittää tuntea virheen suuruusluokka. *Näin ollen mittaustulos ilmoitetaan sillä tarkkuudella kuin havaintojen tarkkuus edellyttää ja virhettä & suht. virhettä määritettäessä käytetään mittauksessa saatua likiarvoa.*