ALGORITMIT MATEMATIIKASSA, MAA12

Likiarvot

Monesti annettuun tehtävään saadaan tarkka vastaus, esim. yhtälön

$$x^3 - 5 = 0$$

ratkaisuksi saadaan $\sqrt[3]{5}$. Entäpä mitä on π^π?

Usein matematiikan sovelluksissa joudutaan suorittamaan laskutoimituksia irrationaalilukujen likiarvoilla sekä mittaustuloksiin perustuvilla suureiden todellisten arvojen likiarvoilla eli *approksimaatioilla*. Mittaustulokset ovat aina likiarvoja!

Tarkastellaan seuraavaksi likiarvojen tarkkuutta ja ilmoitustapaa. Tarkkuus ilmoitetaan yleensä *merkitsevien numeroiden* lukumääränä, joskus *merkitsevien desimaalien* lukumääränä.

Laskuissa käytetään muutamaa pääsääntöä:

- Tulos (huom., ei välitulos) ilmoitetaan niin monen numeron tarkkuudella kuin numeroita on epätarkimmassa lähtöarvossa.
- Kuitenkin **pelkissä** yhteen- ja vähennyslaskuissa tulos esitetään niin monen desimaalin tarkkuudella kuin desimaaleja on epätarkimmassa lähtöarvossa.
- *Kaikki nollasta eroavat numerot ovat merkitseviä.*
- *Nolla on merkitsevä numero luvun keskellä tai desimaaliluvun lopussa.* Kokonaisluvun lopussa olevan (olevien) nollan (nollien) merkitsevyys riippuu asiayhteydestä.

Esimerkki 1:

a) Luvun $\pi \approx 3{,}141\ 592\ 65\ldots$ kolminumeroinen likiarvo (eli likiarvo kolmella merkitsevällä numerolla) on $3{,}14$ ja 4-desimaalinen likiarvo (eli likiarvo neljällä merkitsevällä desimaalilla) on $3{,}141\ 6$.

Esimerkki 1(jatkuu):

b) Luvussa 305 on kolme merkitsevää numeroa, kuten myös luvussa $0{,}0107$.

c) Luvussa $2{,}300$ on neljä merkitsevää numeroa.

d) Luvussa $201\,000$ on merkitseviä numeroita kolme, jos kyseessä on Tampereen väkiluku, mutta kuusi, jos tarkastelussa on tämän euromäärän suuruisesta lainasta.

e) Mittaustulos $605\mathrm{m}\ 83\mathrm{cm}$ voidaan ilmoittaa monella tavalla

	Merkitseviä numeroita	Merkitseviä desimaaleja
$\mathbf{605\,830\ mm}$	5	0
$\mathbf{605{,}83\ m}$	5	2
$\mathbf{0{,}605\,83\ km}$	5	5
	Määrä ei riipu yksiköstä	Määrä riippuu yksiköstä

Esimerkki 1(jatkuu):

f) Likiarvoille on $105{,}7 \cdot 3{,}42 \approx 361$, mutta $105{,}7 \cdot 3{,}420 \approx 361{,}5$ ja $105{,}7 + 3{,}42 \approx 109{,}1$.

Pyöristyssäännöt*:

Mittaustuloksen pyöristyssäännöt:

- Poisjäävä < 5 viimeinen numero ei muutu $6{,}432 \rightarrow 6{,}43$
- Poisjäävä > 5 viimeinen numero +1 $6{,}438 \rightarrow 6{,}44$
- Poisjäävä $= 5$ +muita viimeinen nro +1 $6{,}4351 \rightarrow 6{,}44$
- Poisjäävä $= 5$ lähimpään parilliseen $6{,}435 \rightarrow 6{,}44$
  $6{,}445 \rightarrow 6{,}44$

Tuloksen katkaisukohdan määrää virheen suuruus:

- Virhe ilmoitetaan yhden numeron (15-yksikön) säännöllä ja mittaustulos pyöristetään samaan tarkkuuteen. Siis, jos virheen nollasta poikkeava numero on ykkösiä (satoja, tuhansia, jne.), mittaustuloskin ilmoitetaan ykkösten (satojen, tuhansien, jne.) tarkkuudella.
- *<u>Virhettä</u> ei koskaan pyöristetä alaspäin, vaan aina ylöspäin!*
- Lopputuloksessa ja virheessä sama määrä desimaaleja.

Esimerkki 2:

a) $1\,418{,}2 \pm 8{,}7 \quad \rightarrow \quad 1\,418 \pm 9$

b) $1\,418 \pm 36 \quad \rightarrow \quad 1\,420 \pm 40$

c) $x = 135 \pm 18 \quad \rightarrow \quad x = 140 \pm 20$

d) $f(x) = 3{,}162\,8 \pm 0{,}127\,3 \quad \rightarrow \quad f(x) = 3{,}16 \pm 0{,}13$

e) $y = 31\,628 \pm 1\,273 \quad \rightarrow \quad y = 31\,600 \pm 1300$

f) $C = 1{,}16 \cdot 10^{-18} \pm 5{,}0 \cdot 10^{-20} \rightarrow \quad C = (1{,}16 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-18}$

Harjoitus 1: Kuinka monta merkitsevää numeroa on luvussa.

a) $90\,001$ b) $00{,}001$ c) $10{,}001$ d) $09\,000{,}000\,1$

e) 207 f) $207{,}00$ g) $207{,}000$ h) $207\,000$

Harjoitus 2: Pyöristä pyöristyssääntöjen mukaan.

a) 419 ± 37 b) $00{,}001\,4 \pm 0{,}002\,2$ c) $10{,}001 \pm 0{,}000\,15$

d) $3{,}17 \pm 0{,}118$ e) $9\,000 \pm 149{,}9$ f) $1{,}33 \cdot 10^{-7} \pm 0{,}02 \cdot 10^{-9}$

Milloin likimääräismerkki $\approx$ ja milloin yhtäsuuruusmerkki $=$?

Esimerkki $2^{\sqrt{2}} = 2{,}665 \ldots \approx 2{,}67$, eli jos käytät kolmea pistettä, niin se tarkoittaa desimaalien jatkuvan ”äärettömästi”, jolloin luku ajatellaan tarkaksi eikä pyöristetyksi.

Kymmenpotenssimuodot

Itseisarvoltaan hyvin suuret ja hyvin pienet luvut esitetään kymmenpotenssimuodossa, ns. tieteellinen esitystapa:

$$a \cdot 10^n, \qquad \text{missä } 0 \leq a \leq 9, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Laskimissa $\boxed{\text{EXP}}$, $\boxed{\text{x}10^x}$ tai $\boxed{\text{EE}}$ tai jokin muu.

Likiarvon kymmenpotenssimuodosta näkyy merkitsevien numeroiden lukumäärä.

Esimerkki a) Marsin keskietäisyys Auringosta on

$$228\,000\,000\,000 \text{ m} = 2{,}28 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Laskin: 2,28$\boxed{\text{EXP}}$11.

Esimerkki(jatkuu) b) Happiatomin halkaisija on

$$132\ \mathrm{pm} = 132 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m} = 1{,}32 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} = 1{,}32\text{Å}.$$

Laskin: 1,32 $\boxed{\mathrm{EXP}}$ −10.

Palautetaan mieleen: milli 10^{-3}, mikro 10^{-6}, nano 10^{-9}, piko on 10^{-12}, femto 10^{-15} ja atto 10^{-18}, entäs positiiviseen suuntaan:
kilo 10^{3}, mega, 10^{6}, giga, 10^{9}, tera, 10^{12}, peta 10^{15} ja eksa 10^{18}.

Esimerkki a) Marsin keskietäisyys Auringosta on 2,28E11 metriä eli $2{,}28 \cdot 10^{11}$ m ja valon nopeus on noin 3,0E8 metriä/sekunti, joten Auringosta lähtevän fotonin kulku Marsiin kestää

$$2{,}28\boxed{\mathrm{EXP}}11\ \boxed{\div}\ 3{,}0\boxed{\mathrm{EXP}}8 = 760\ \mathrm{s}.$$

b) Happiatomin halkaisija on $1{,}32\text{Å}$, joten fotoni ohittaa sen ajassa

$$1{,}32\boxed{\mathrm{EXP}} - 10\ \boxed{\div}\ 3{,}0\boxed{\mathrm{EXP}}8 = 4{,}4 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{s}.$$

Huom! Isoilla luvuilla laskettaessa pyri aina tulkitsemaan tuloksen järkevyyttä (varsinkin fysiikan ja kemian laskuissa).