ALGORITMIT MATEMA-
TIIKASSA, MAA12

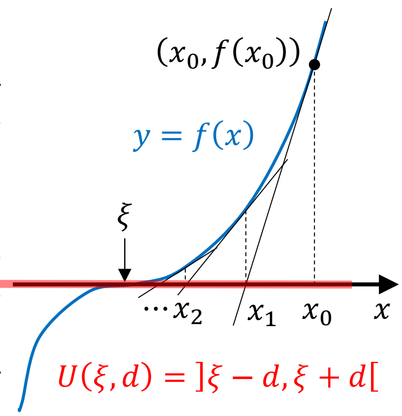
Newtonin menetelmä

Yhtälön $f(x)=0$ ratkaiseminen haarukoimalla kunnollisella tarkkuudella vaatii usein laskimen ohjelmointia tai tietokoneohjelmaa. Tehokkaampia menetelmiä on toki olemassa, tutustutaan niistä ensin *Newtonin menetelmään*.

Oletetaan, että funktio f on derivoituva ja derivaatan merkki säilyy tarkan ratkaisun ξ (eli yhtälön $f(x)=0$ nollakohdan eli juuren) jossakin ympäristössä

$$U(\xi,d)=\,]\xi-d,\xi+d[\,.$$

Valitaan alkulikiarvo $x_0\in U(\xi,d)$ ja korvataan käyrä $y=f(x)$ tangentillaan, joka kulkee pisteen $(x_0,f(x_0))$ kautta. Tangentin, jonka kk. on $f'(x_0)$, ja x-akselin leikkauspiste x_1 on uusi likiarvo.



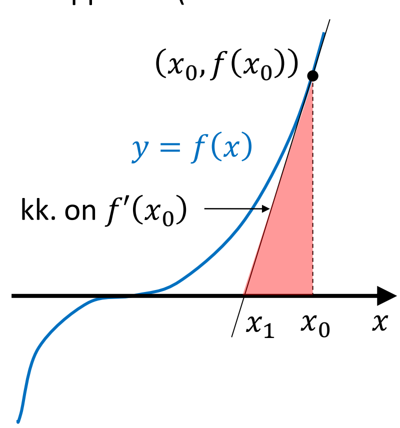
Uudet likiarvot x_1, x_2, … ovat yleensä lähempänä tarkkaa arvoa ξ kuin alkulikiarvo x_1. Saadaan siis jono (x_n), joka suppenee (mikäli menetelmä toimii) kohti tarkkaa arvoa ξ.
Kuinka kohdasta x_0 sitten saadaan x_1?

Tarkastellaan kolmiota, jonka kärjet ovat pisteet: $(x_0,0)$, $(x_1,0)$ ja $(x_0,f(x_0))$.
Saadaan

$$\frac{f(x_0)-0}{x_0-x_1}=f'(x_0)\,,$$

josta

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,.$$



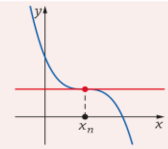
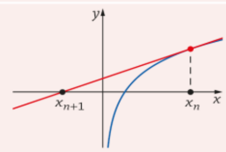
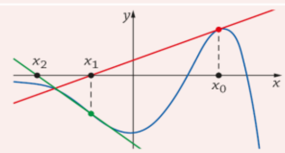
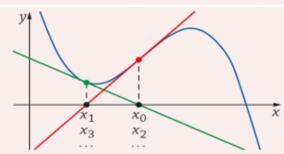
Vastaavasti saadaan yleisen n:nen vaiheen lauseke (iteraatiokaava)
Myös rekursiokaava eli palautuskaava nimeä käytetään → kurssi 9.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Mikäli menetelmä toimii…mitä tämä tarkoittaa?

Kirjan sivulla 67 on muutama esimerkkitilanne, milloin Newtonin menetelmä ei suppene kohti nollakohtaa. Syy, huonosti valittu alkulikiarvo.

→ Yleistä sääntöä hyvän alkulikiarvon löytämiselle ei ole. Näin ollen kannattaakin aluksi puolitusmenetelmällä edetä lähelle juurta ja sitten Newtonia käyttäen haluttuun tarkkuuteen.

Tilanne, jossa Newtonin menetelmä ei toimi	Kuva
Derivaatta saa arvon nolla jossakin kohdista x_n.	
Tangentin ja x-akselin leikkauskohta sijaitsee funktion f määrittelyjoukon ulkopuolella jossakin kohdista x_n.	
Algoritmin tuottamat likiarvot siirtyvät nollakohdasta poispäin kohti toista, kauempana olevaa nollakohtaa tai rajatta kohti ääretöntä.	
Likiarvot jäävät vaihtelemaan kahden arvon välille.	

Esimerkki Määritä funktion $f(x) = x + \ln x$ nollakohta Newtonin menetelmällä. Vertaa puolitusmenetelmään.

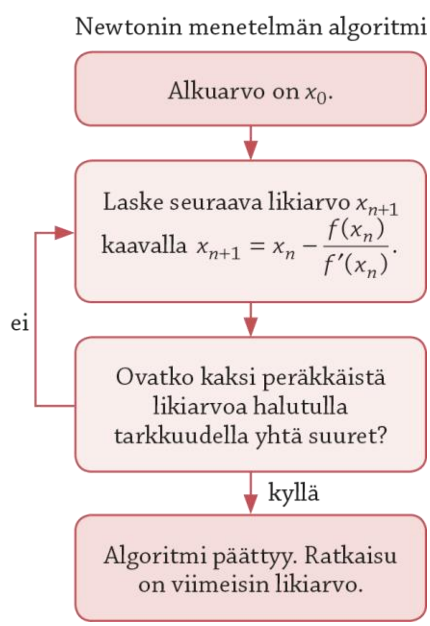
Valitaan alkulikiarvoksi $x_0 = 0{,}55$. Koska $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, saadaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + \ln x_n}{1 + \frac{1}{x_n}} = \frac{1 - \ln x_n}{1 + \frac{1}{x_n}}.$$

Laskin: Aluksi kirjoitetaan 0,55 ja painetaan **ENTER**:iä. Luku 0,55 tallentuu **Ans**-muuttujan arvoksi. Sitten kirjoitetaan

(1-ln **Ans**)/(1+1/**Ans**).

Nyt riittää painaa ENTERiä ja saadaan yhä tarkempia likiarvoja nollakohdalle. Iterointia jatketaan kunnes 2 peräkkäistä arvoa ovat samat.



Sekanttimenetelmä (lineaarinen interpolaatio):
Derivaatta f' on määritelmän mukaan erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \qquad \lim_{x_n \to x_{n-1}} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} .$$

Korvataan Newtonin menetelmässä derivaatta f' erotusosamäärällä

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} ,$$

jolloin saadaan ns. *sekanttimenetelmä*. Perusidea sama kuin Newtonin menetelmässä, mutta nyt tarvitaan yhden alkuarvon sijasta kaksi alku-arvoa. Siis

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad n = 1,2,3,\ldots .$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Määritetään sekanttimenetelmällä yhtälön

$$x^5 + x - 1 = 0$$

juuri väliltä $]0,1[$ neljän desimaalin tarkkuudella.

Taulukointi antaa, käytetään lauseketta $x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	x_n	$f(x_n)$	x_{n+1}
0	$0^5 + 0 - 1 = -1$	1	$1^5 + 1 - 1 = 1$	$\frac{0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$
1	$1^5 + 1 - 1 = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{15}{32}$	$\frac{0 \cdot \left(-\frac{15}{32}\right) - \frac{1}{2} \cdot 1}{\left(-\frac{15}{32}\right) - 1} = \frac{31}{47}$
$\frac{1}{2}$	$= -\frac{15}{32}$	$\frac{31}{47}$	$\approx -0{,}21559\ldots$	$\approx 0{,}795473\ldots$
$\frac{31}{47}$	$\approx -0{,}21559\ldots$	$\approx 0{,}79\ldots$	$\approx 0{,}11398\ldots$	$\approx 0{,}7484\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$