Virheen arviointia

ALGORITMIT MATEMATIIKASSA, MAA12

Virhettä, tai oikeammin virheen suuruutta, voidaan arvioida seuraavilla tavoilla:

1. *Maksimi-minimikeino (-menettely)*, nopea ja yksinkertainen, mutta karkea.
2. *Väliarvolauseen hyödyntäminen*, → kurssin 13 asioita.
3. *Virhekaavojen käyttö* ja *virheiden neliöllinen yhdistäminen*, kun on vain peruslaskutoimituksia ($+, -, \times, \div$), parempi kuin *max-minkeino*.
4. *Virheen eteneminen –menettely*, sopii kaikille funktioille, mutta vaatii derivointia (osittaisderivaattoja).

Muista aina myös miettiä, mikä muuttuja ”dominoi” virhettä, eli vaikuttaa eniten virheeseen!

1. Maksimi-minimikeino (-menettely)

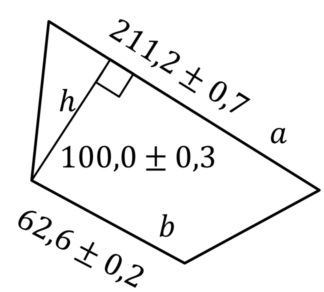
Lasketaan lausekkeen suurin ja pienin mahdollinen arvo, jonka jälkeen näiden, edellä laskettujen, arvojen erotus jaetaan kahdella. Siis

$$|\Delta f| = \frac{f_{\mathrm{max}} - f_{\mathrm{min}}}{2}, \qquad \text{missä } f \text{ on laskulauseke.}$$

Tämä menetelmä antaa virhearvion pahimman mahdollisen tilanteen mukaan, eli antaa arvion virheen *maksimiarvosta*. Virhearviota tehtäessä oletetaan, että epävarmuudet vaikuttavat samaan suuntaan.

Menetelmä on äärimmäisen nopea ja saadaan ns. ”ensisilmäys” virheen suuruudesta.

Esimerkki Määritä puolisuunnikkaan pinta-ala max-minkeinolla.



$$A_{\mathrm{puolisuunnikas}} = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$$

$$A = \frac{(62{,}6 + 211{,}2)}{2} \cdot 100{,}0 = 13\,690$$

$$A_{\mathrm{max}} = \frac{(62{,}8 + 211{,}9)}{2} \cdot 100{,}3 = 13\,776{,}205$$

$$A_{\mathrm{min}} = \frac{(62{,}4 + 210{,}5)}{2} \cdot 99{,}7 = 13\,604{,}065$$

Vastaus:

$A = 13\,690 \pm 0{,}6\%$

$A = 13\,690 \pm 90$

$$|\Delta A| = \frac{A_{\mathrm{max}} - A_{\mathrm{min}}}{2} = \frac{172{,}14}{2} = 86{,}07 \quad \text{ja} \quad \left|\frac{\Delta A}{A}\right| = \frac{86{,}07}{13\,690} = 0{,}0062\ldots \approx 0{,}6\%.$$

2. Väliarvolauseen hyödyntäminen (lyhyesti, kts. → moniste)
Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a,b[$. Tällöin on olemassa $\xi \in]a,b[$ siten, että

$$\big(f(b)-f(a)\big)=f'(\xi)(b-a).$$

Hyödynnetään tulosta: Olkoon b muuttujan tarkka arvo ja a likiarvo. Tällöin virhe on

$$|\Delta f|=|f(b)-f(a)|=|f'(\xi)|\cdot|b-a|.$$

Ja jos derivaatan itseisarvolle tunnetaan yläraja välillä $]a,b[$, eli

$$|f'(x)|\le M, \qquad \forall x\in]a,b[, \qquad M\in\mathbb{R},$$

niin

$$|f(b)-f(a)|=|f'(\xi)|\cdot|b-a|\le \underbrace{M}_{\in\mathbb{R}}\cdot\underbrace{|b-a|}_{\in\mathbb{R}}.$$

Esimerkki Kuinka suuri virhe tehdään, kun luku e^3 lasketaan käyttäen Neperin luvulle likiarvoa 2,72?
Aluksi todetaan, että $e\in]2{,}7182\,;\,2{,}72[$. Tarkastellaan funktiota

$$f: f(x)=x^3, \qquad x\in]2{,}7182\,;\,2{,}72[\ .$$

Esimerkki(jatkuu) Derivointi antaa:

$$f': f'(x)=3x^2.$$

Ja saadaan arvio

$$|f'(x)|\le 3\cdot 2{,}72^2=22{,}195=:M.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}|f(e)-f(2{,}72)| &\le 3\cdot 2{,}72^2\cdot|e-2{,}72|\\ &\le 3\cdot 2{,}72^2\cdot|2{,}7182-2{,}72|\\ &=0{,}039\,95\ldots\\ &<0{,}04\end{aligned}$$

3. Virhekaavojen käyttö
Kaavojen käyttö nojautuu kolmioepäyhtälöön ja peruslaskutoimitusten luonteeseen. Kun f on laskulauseke, x, y muuttujia ja laskutoimituksena on

- summa tai vähennys, niin absoluuttinen virhe on $|\Delta f|\le|\Delta x|+|\Delta y|$
- tulo tai osamäärä, niin suhteellinen virhe on $\left|\frac{\Delta f}{f}\right|\le\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$
- potenssi, niin suhteellinen virhe on $\left|\frac{\Delta f}{f}\right|\le n\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ $(n\in\mathbb{Z})$

Tarkempi käsittely löytynee kirjasta. Virhekaavat pätevät myös, jos on useampia muuttujia kuin kaksi. Esimerkiksi, jos $f = x + y + z + \ldots - u - v - w - \ldots$, niin

$$|\Delta f| \leq |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z| + \ldots + |\Delta u| + |\Delta v| + |\Delta w| + \ldots$$

Esimerkki
Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala käyttäen virhekaavoja. Pyöristyksestä johtuen pituuksien likiarvojen absoluuttiset virheet ovat enintään 0,05, joten

$$A(a,b,h) = \frac{(a+b)}{2} \cdot h \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\Delta A}{A}\right| \leq \left|\frac{\Delta(a+b)}{a+b}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right|,$$

jossa kerroin 2 voidaan jättää huomioimatta (miksi?).
Arvio etenee, sillä summa huomioiden

$$\left|\frac{\Delta(a+b)}{a+b}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| \leq \left|\frac{\Delta a + \Delta b}{a+b}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| = \left|\frac{0{,}05 + 0{,}05}{211{,}2 + 62{,}6}\right| + \left|\frac{0{,}05}{100{,}0}\right|$$

$$= 3{,}652\ldots \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4} = 8{,}652\ldots \cdot 10^{-4} \approx 0{,}09\ \%.$$

Virheen arvio on parempi kuin max-min menetelmällä saatu 0,6 %.

Virheiden neliöllinen yhdistäminen on yleinen periaate todennäköistä virhettä arvioitaessa. Tätä menettelyä käytetään aina, kun muuttujat ovat riippumattomia ja niiden virheet satunnaisia. Soveltunee parhaiten peruslaskutoimituksia sisältäville laskutoimituksille.
Yleisesti, jos $f = f(x,y) = x + y$, eli summalauseke, niin

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Ja, jos $f = f(x,y) = xy$, eli tulolauseke, niin $\left|\frac{\Delta f}{f}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$.

Esimerkki Kuten edellä, lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala käyttäen virheiden neliöllistä yhdistämistä. Pyöristyksestä johtuen pituuksien likiarvojen absoluuttiset virheet ovat enintään 0,05, joten

$$A(a,b,h) = \frac{(a+b)}{2} \cdot h \Rightarrow \left|\frac{\Delta A}{A}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta(a+b)}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}$$

$$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta(a+b)}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}$$

$$\Rightarrow = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(0{,}05)^2 + (0{,}05)^2}}{211{,}2 + 62{,}6}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{100{,}0}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(2{,}58 \ldots \cdot 10^{-4})^2 + (5 \cdot 10^{-4})^2} = 5{,}627 \ldots \cdot 10^{-4} \approx 0{,}06\ \%$$

Jälleen parani virheen arvio.

4. Yleinen virheen etenemis-menetelmä

Tarkastellaan lyhyesti esimerkkien avulla. Tätä ei vaadita kokeessa.

Esimerkki Kuten edellä, lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala käyttäen ”virheen etenemis”-menetelmää. Pyöristyksestä johtuen pituuksien likiarvojen absoluuttiset virheet ovat enintään 0,05.

Aluksi tarvitaan osittaisderivaatat jokaisen muuttujan suhteen tarkasteltavasta funktiosta, joka nyt on pinta-alafunktio (3 muuttujaa)

$$A = A(a, b, h) = \frac{(a + b)}{2} \cdot h$$

Saadaan:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{h}{2}, \qquad \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{h}{2}, \qquad \frac{\partial A}{\partial h} = \frac{a + b}{2}$$

ja

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{h}{2} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{h}{2} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{a + b}{2} \cdot \Delta h\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{100{,}0}{2} \cdot 0{,}05\right)^2 + \left(\frac{100{,}0}{2} \cdot 0{,}05\right)^2 + \left(\frac{273{,}8}{2} \cdot 0{,}05\right)^2}$$

$$= \sqrt{(2{,}5)^2 + (2{,}5)^2 + (6{,}845)^2} = 7{,}704156 \ldots$$

Näin ollen suhteellinen virhe on

$$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| = \frac{7{,}704156 \ldots}{13\,690} = 5{,}627 \ldots \cdot 10^{-4} \approx 0{,}06\ \%$$

Esimerkki Suorakulmaisen metallisärmiön mitoiksi saatiin $a = 304$ mm, $b = 257$ mm ja $c = 34$ mm. Kussakin mittauksessa absol. virhe on 0,5 mm. Särmiön massaksi saatiin $m = (16{,}64 \pm 0{,}05)$ kg. Laske särmiön tiheys virherajoineen.

Ratkaisu Särmiön tiheysfunktio $\rho = \rho(m, a, b, c) = \frac{m}{abc}$. Lisäksi tiedetään, että $\Delta a = 0{,}5$ kuin myös $\Delta b = \Delta c = 0{,}5$ sekä $\Delta m = 0{,}05$.
Osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{1}{abc}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial a} = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{m}{bc}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial b} = -\frac{1}{b^2}\cdot\frac{m}{ac}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial c} = -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{m}{ab}$$

Näin ollen (huomaa, että pitää muuttaa millimetrit metreiksi)

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\cdot\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial a}\cdot\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial b}\cdot\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial c}\cdot\Delta c\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{abc}\cdot 0{,}05\right)^2 + \left(-\frac{m}{a^2bc}\cdot 0{,}0005\right)^2 + \left(-\frac{m}{b^2ac}\cdot 0{,}0005\right)^2 + \left(-\frac{m}{c^2ab}\cdot 0{,}0005\right)^2}$$

$$= \sqrt{(18{,}822\ldots)^2 + (-10{,}303\ldots)^2 + (-12{,}187\ldots)^2 + (-92{,}121\ldots)^2}$$

$$= 95{,}36908\ldots$$

Lisäksi

$$\rho = \frac{16{,}64}{0{,}304\cdot 0{,}257\cdot 0{,}034} = 6\,264{,}230\ldots$$

Siis, särmiön tiheys virheineen

$$\rho = 6\,300 \pm 100$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| = \frac{95{,}36908\ldots}{6264{,}2} = 0{,}015224\ldots \approx 1{,}5\%$$

Huomautus **1.** Muista: virhe pyöristetään aina ylöspäin. Voidaan käyttää 15 yksikön sääntöä.
2. Kun virhe on pyöristetty pyöristetään itse suureen arvo normaalien pyöristyssääntöjen mukaisesti.
3. Likiarvoilla laskettaessa ei välituloksia saa pyöristää! Vasta loppu-tulos pyöristetään.