Lukujärjestelmät

Lukujen merkitsemiseen käytetään numeromerkkejä. Tarvittavien merkkien määrä taas riippuu käytettävästä *lukujärjestelmästä*. *Lukujärjestelmä voidaan määritellä(ymmärtää) menetelmänä lukujen esittämiseksi numeroiden avulla siten, että numeroita tarvitaan mahdollisimman vähän ja suuretkin luvut on helppo merkitä.* Tarkastellaan eri lukujärjestelmiä esimerkkien myötä.

Esimerkki 1 Lukujen merkitsemisessä käytetään nykyään *kymmenjärjestelmää* eli sellaista *paikkajärjestelmää*, jonka kantaluku on 10. Kantaluvun valinta kymmeneksi on pelkästään biologinen (10 sormea) eikä matemaattinen. Paikkajärjestelmässä kunkin numeron $0,1,\ldots,9$ arvo määräytyy paikan perusteella.
Esimerkiksi luku 2 356 on

$$2\,356 = 2 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$$

ja se luetaan: ”kaksi-**tuhatta**-kolme-**sataa**-viisi-**kymmentä**-kuusi”. Luku 2 356 voidaan ilmaista kantaluvun 10 nojalla muodossa

$$2\,356 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

Toisaalta luvulle 13,016 saadaan

$$13{,}016 = 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}.$$

Esimerkki 2 Tietokoneet käyttävät mahdollisimman yksinkertaista paikkajärjestelmää, *kaksijärjestelmää* eli *binäärijärjestelmää*, jonka kantaluku on 2. Tässä järjestelmässä riittää kaksi numero, nimittäin 0 ja 1, kaikkien lukujen esittämiseen. Numeromerkeistä 0 ja 1 käytetään nimitystä *bitti* (lyhennetty sanoista ”binary digit”).
Binäärijärjestelmän luku 101101 tarkoittaa 10-järjestelmässä lukua

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45$$

Muunna 10-järjestelmän luku 43 eli 43_{10} *binääriluvuksi*.
HUOM! Kun halutaan ilmoittaa missä lukujärjestelmässä annettu luku on, niin järjestelmän kantaluku laitetaan oikeaan alaindeksiin (jos ei ole mitään, niin luku on tällöin annettu 10-järjestelmässä).
Kirjoitetaan luku 43 luvun 2 potenssien summana, saadaan

$$\begin{aligned} 43_{10} &= 32 + 8 + 2 + 1 \\ &= \mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{0} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \\ &= 101011_2 \end{aligned}$$

Esimerkki 3 *Oktaalijärjestelmän* eli 8-järjestelmän luku eli lyhyemmin *oktaaliluku* 475 tarkoittaa 10-järjestelmän lukua

$$4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 256 + 56 + 5 = 317.$$

Vastaavasti oktaalijärjestelmän luku $417{,}23_8$ on 10-järjestelmässä

$$\begin{aligned} &4 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} + 3 \cdot 8^{-2} \\ &= 256 + 8 + 7 + \frac{2}{8} + \frac{3}{64} = 271\frac{19}{64} = 271{,}296\,875. \end{aligned}$$

Esitä oktaalijärjestelmässä 10-järjestelmän luku 319.
Jakamalla toistuvasti kahdeksalla, saadaan

$$319 = 39 \cdot 8 + 7, \qquad 39 = 4 \cdot 8 + 7, \qquad 4 = 0 \cdot 8 + 4,$$

joten

$$319 = 39 \cdot 8 + 7 = (4 \cdot 8 + 7) \cdot 8 + 7 = 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 7 = 477_8.$$

Toinen tapa:
Muunna 10-järjestelmän luku $417{,}23$ oktaalijärjestelmän luvuksi.
Aluksi $\frac{417{,}23}{8^2} = 6{,}5 \ldots < 8$ eli ensimmäinen numero on **6**. Sitten suoritetaan erotus $417{,}23 - 6 \cdot 8^2 = 33{,}23$.

Edelleen $\frac{33{,}23}{8} = 4{,}1 \ldots < 8$, joten toinen numero on **4**. Sitten suoritetaan erotus $33{,}23 - 4 \cdot 8^1 = 1{,}23$ ja kolmanneksi numeroksi saadaan $\mathbf{1}$, sillä $1 = 1 \cdot 8^0$. Sitten desimaalit: $0{,}23 = x \cdot \frac{1}{8^1}$, josta $x = 1{,}84$ eli ensimmäinen desimaali on **1**, jolloin jää $0{,}23 - \frac{1}{8^1} = 0{,}105$. Edel-leen $0{,}105 = x \cdot \frac{1}{8^2}$, josta $x = 6{,}75$ eli toinen desimaali on **6**, jää $0{,}105 - \frac{1}{8^2} = 0{,}089375$ jne…
Saatiin, että

$$417{,}23_{10} \approx 641{,}16\ldots_8 \,.$$

Esimerkki 4 Jos lukujärjestelmässä kantaluku on suurempi kuin 10, niin tarvitaan lisää numeromerkkejä. *Heksadesimaalijärjestelmässä* eli 16-järjestelmässä on luvuille kymmenen, yksitoista, …, viisitoista annettava omat merkkinsä. Ne ovat A, B, C, D, E ja F. Nyt 16-järjestelmän luku eli *heksadesimaaliluku* B9E tarkoittaa 10-järjestelmän lukua

$$B \cdot 16^2 + 9 \cdot 16^1 + E \cdot 16^0 = 11 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16 + 14 = 2\,974.$$

Vastaavasti luku $BF50,C_{16}$ tarkoittaa 10-järjestelmän lukua

$$B \cdot 16^3 + F \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 + C \cdot 16^{-1}$$
$$= 11 \cdot 16^3 + 15 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16 + 0 + 12 \cdot 16^{-1}$$
$$= 45\,056 + 3\,840 + 80 + 0{,}75 = 48\,976{,}75\,.$$

Esimerkki 4 Laadi 5-järjestelmän kertolaskutaulukko.
Oletetaan, että käytössä on numeromerkit $0, 1, 2, 3, 4$. Tällöin esimerkiksi

$2_{10} \cdot 3_{10} = 6_{10}$
$= 1 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 11_5$

$3_{10} \cdot 4_{10} = 12_{10}$
$= 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 22_5$

Saadaan →

$*$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31