Päättely

1. Premissit (oletukset) ja johtopäätös

Esimerkki 1 Tarkastellaan päättelyä
1. Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia.
2. Sokrates on ihminen.

---

3. Siis Sokrates on kuolevainen.

Lauseet 1. ja 2. ovat tämän päättelyn *oletukset* eli *premissit*. Lause 3. on *johtopäätös*. Yllä oleva päättely tuntuu *pätevältä*. Olennaista **ei ole**, ovatko kaikki ihmiset varmasti kuolevaisia ja kuka tai mikä Sokrates on. Olennaista **on**, että jos premissejä pidetään tosina, niin johtopäätös on pakko hyväksyä myös todeksi.

HUOM! Päättely voidaan osoittaa epäpäteväksi antamalla yksikin sellainen *vastaesimerkki*, jossa premissit ovat tosia mutta johtopäätös on epätosi.

Esimerkki 2 Tarkastellaan päättelyä
1. Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia.
2. Sokrates on kuolevainen.

---

3. Siis Sokrates on ihminen.

Tämä päättely on epäpätevä, sillä voihan olla olemassa Sokrates-niminen lemmikkieläin ja silloin premissit (lauseet 1. ja 2.) ovat tosia, mutta johtopäätös (lause 3.) on epätosi. Löydettiin vastaesimerkki!

Pätevä päättely *säilyttää totuuden*. Jos premissit ovat tosia, niin johtopäätös on tosi. Jos taas kaikki premissit eivät ole tosia, niin johtopäätöksen totuudesta ei voida sanoa mitään.

Esimerkki 3 Tarkastellaan päättelyä
1. Kaikki antiikin kreikkalaiset tutkivat geometriaa.
2. Sokrates oli antiikin kreikkalainen.

---

3. Siis Sokrates tutki geometriaa.

Päättely tuntuu pätevältä, vaikka tiedetään, ettei kaikki antiikin kreikkalaiset tutkineet geometriaa.

Päättelystä ei kuitenkaan seuraa johtopäätöksen totuus, sillä ensimmäinen premissi (lause 1.) on epätosi. Ei siis tiedetä, tutkiko Sokrates geometriaa vai ei.

2. Päättelysääntö

Jokaista sellaista tautologiaa, jonka pääkonnektiivi on implikaatio tai ekvivalenssi, vastaa jokin *päättelysääntö*.
Palataan yhteen jo esillä olleeseen päättelysääntöön, nimittäin *modus ponendo ponens* eli lyhyemmin *modus ponens* – päättelysääntöön

$$p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q,$$

joka on tautologia.

1. Lause p on tosi.
2. Jos lause p on tosi, niin lause q on tosi.

---

3. Siis lause q on tosi.

Tämä voidaan kirjoittaa lyhyemmin muodossa

$$\left\{\begin{array}{l} p \\ p \Longrightarrow q \\ \hline q \end{array}\right.$$

Tämä on matematiikassa hyvin tyypillinen päättelysääntö: ”Oletus pitää paikkansa” ja ”Jos oletukset voimassa, niin väite pitää paikkansa”, jolloin tehdään johtopäätös ”Väite pitää paikkansa.”

Esimerkki 1 Laadi modus ponens – päättelysääntö siitä, että matematiikkaa oppii tekemällä kunnolla kotitehtävät.

Konjunktion vaihdantalain ($p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$) nojalla premissit saa kirjoittaa missä tahansa järjestyksessä. On makuasia haluaako kirjoittaa ”Jos…, niin…” – premissin ensiksi vai toiseksi.

1. Teen kunnolla kotitehtävät
2. Jos teen kunnolla kotitehtävät, niin opin matematiikkaa.

---

3. Siis opin matematiikkaa.

Esimerkki 2 Laadi **a)** luonnollisella kielellä, **b)** loogisella formalismilla modus ponens – päättelykaavio siitä, että lukua 2 suuremman luvun neliö on lukua 4 suurempi.

a)
1. $x > 2$.
2. Jos $x > 2$, niin $x^2 > 4$.
3. Siis $x^2 > 4$.

b)

$$\begin{array}{l} x > 2 \\ x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4 \\ \hline x^2 > 4 \end{array}$$

3. Tärkeitä päättelysääntöjä

Täydennetään tautologiakokoelmaa niillä tautologioilla, jotka esiintyvät usein matemaattisissa todistuksissa (pääkonnektiivi $\Longrightarrow$ tai $\Longleftrightarrow$). Tautologioiden nimet ovat itse asiassa vastaavien päättelysääntöjen nimiä.

Lause, Päättelysääntöjä:

$p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q$	Modus ponendo ponens	Suora todistus
$\neg q \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow \neg p$	Modus tollendo tollens	Käänteinen suora tod.
Vertaa! $p \wedge (\neg q \Longrightarrow \neg p) \Longrightarrow q$	Reductio ad absurdum eli epä-	
$\big(\neg q \Longrightarrow (s \wedge \neg s)\big) \Longrightarrow q$	suoran todistamisen sääntö	
$p \wedge \big((p \wedge \neg q) \Longrightarrow (s \wedge \neg s)\big) \Longrightarrow q$	R.ad.a, yleinen ristiriitatodistus	
$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$	Syllogismi, eli 2 premissiä ja johtopäätös	
$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$	Ekvivalenssi ja kaksoisimplikaatio	
$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$	Kontrapositio	

Matematiikassa todistus on *suora* tai *epäsuora*. Harvemmin käytetään käänteistä suoraa todistusta (modus tollendo tollens)

$$\neg q \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow \neg p$$

Todistuksiin palataan myöhemmin, predikaattilogiikan jälkeen.

4. Päättelyn formalisointi

Eräitä luonnollisella kielellä esitettyjä lauseita ja päättelyjä voidaan formalisoida, eli kirjoittaa lauselogiikan kielellä (matematisoida).

Esimerkki 1 Tarkastellaan kirkkoisä Origeneen n.185-254, päättelyä.
1. Jos tiedän olevani *kuollut*, niin olen kuollut.
2. Jos *tiedän* olevani kuollut, niin en ole kuollut.
3. Siis en tiedä olevani kuollut.

Merkitään $p =$"Tiedän olevani kuollut" ja $q =$"Olen kuollut". Tällöin päättely saadaan muotoon. Lause $(p \Longrightarrow q) \wedge (p \Longrightarrow \neg q\,) \Longrightarrow \neg p$ on tautologia, joten Origeneen päättely on loogisesti pätevä. Tällä perusteella ei kuitenkaan voida sanoa mitään premissien eikä myöskään johtopäätöksen oikeellisuudesta.

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ p \Longrightarrow \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Esimerkki 2 Yritetään formalisoida ihan ensimmäisen esimerkin päättely. Merkitään $p =$"Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia", $q =$"Sokrates on ihminen" ja $r =$"Sokrates on kuolevainen".
Päättely saadaan muotoon

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

Lause $p \land q \Longrightarrow r$ **ei** kuitenkaan **ole tautologia**. Tästä ei kuitenkaan seuraa, että tämä päättely olisi epäpätevä. On todettava, ettei pystytä osoittamaan sen pätevyyttä lauselogiikan avulla. Lauselogiikka on logiikan kielenä niin alkeellinen, ettei edes näin yksinkertaista päättelyä voida formalisoida siinä kunnolla. Tarvitaan predikaattilogiikkaa!

Muista… Jokaista sellaista **tautologiaa**, jonka pääkonnektiivi on implikaatio tai ekvivalenssi, vastaa jokin *päättelysääntö*.